GRAMOTNOST, PREGRAMOTNOST A VZDĚLÁVÁNÍ, 2, 2, 45—68

VÝZKUMNÁ STUDIE

Propedeutika analytické geometrie v rovině

Plane Analytic Geometry Propedeutics

Vlasta Moravcová, Štěpánka Kaňková

Abstrakt: V současné výuce analytické geometrie na středních školách často chybí dostatečná názorná vizualizace základního pojmu vektor. Pro nedostatek času brzy nasazujeme aparát rovnic a žáci zpravidla bez pochopení a bez reálné představy pouze aplikují naučené algoritmy. V rámci projektu OP VVV *Zvýšení kvality vzdělávání žáků, rozvoje klíčových kompetencí, oblastí vzdělávání a gramotností* proto hledáme způsob, jak tento negativní přístup minimalizovat. V příspěvku nejprve analyzujeme současný stav a dále představujeme sérii vlastních úloh vhodných pro žáky druhého stupně základní školy a žáky střední školy, které jsou zaměřeny na práci s kartézskou soustavou souřadnic a propojují různé oblasti matematiky. Podrobněji se věnujeme rozboru přístupů žáků různých ročníků šestiletého a čtyřletého gymnázia k řešení těchto úloh. Na zkoumaném vzorku se překvapivě ukázalo, že mladší žáci jsou v řešení předložených úloh úspěšnější než žáci předmaturitního ročníku.

Klíčová slova: kartézská soustava souřadnic, bod, vektor, rovinný útvar, osová souměrnost, středová souměrnost, algebraický výraz, kurikulum matematiky, učebnice matematiky, hra „formulky“

Abstract: We are often facing a lack of illustrative visualization for the fundamental term vector in secondary school education. Due to the time limitation, we are starting equations usage too early and as a result, pupils are using only memorized algorithms without any background understanding. We are searching for the possibilities of minimization such negative approaches in project OP VVV *Enhancing the quality of education, developing key competences, areas of education and literacy*. This article provides the current situation description and introduces a set of tasks created by ourselves. The tasks are intended for secondary school pupils, focused on work with Cartesian coordinate system and joining various parts of mathematics. Moreover, we are analysing the solving approach of several classes from both six-year and four-year grammar school pupils. Finally, a surprising result that the younger pupils have been more successful than their older colleagues is presented.

Key words: Cartesian coordinate system, point, vector, plane shape, axial symmetry, central symmetry, algebraic expression, mathematics curriculum, mathematics textbooks, 'formulky' game

Úvod

V analytické geometrii na střední škole pracujeme s kartézskou soustavou souřadnic a dvěma základními pojmy – bod a vektor. Geometrické úlohy převádíme na problémy úprav a vyčíslení matematických výrazů a především pak na řešení rovnic a jejich soustav. Znalosti žáků z předcházejícího učiva syntetické geometrie (planimetrie) často nestojí na pevných základech a při výuce analytické geometrie ustupují do pozadí. Žáci tak nemají dostatečnou vizuální představu a hrozí tendence k algoritmizaci bez pochopení přímých souvislostí a návazností na dosavadní znalosti. Na základě dlouhodobého pozorování tohoto stavu během školní praxe jsme vyzkoušely řadu přístupů, jak výše popsané negativní dopady odstranit nebo alespoň zmírnit. Největšího efektu jsme docílily průběžným začleněním specifických úloh již od druhého stupně vzdělávání.

Současný stav a motivace

S kartézskou soustavou souřadnic v rovině se žáci setkávají na druhém stupni vzdělávání. V aktuálním kurikulárním dokumentu, Rámcovém vzdělávacím programu pro základní školy (dále jen RVP ZV), nalezneme pravoúhlou soustavu souřadnic mezi doporučeným učivem k tématu Závislosti, vztahy a práce s daty (MŠMT, 2017, s. 35), seznámení s ní je nutným předpokladem pro zvládnutí závazného očekávaného výstupu „M-9-2-04: žák vyjádří funkční vztah tabulkou, rovnicí, grafem“ (MŠMT, 2017, s. 35).

Z RVP ZV však nevyplývá zařazení učiva do ročníku. Vyjdeme-li ze současných učebnic pro základní školy, zjistíme, že aplikovaných přístupů je více. Například učebnice z nakladatelství Fortuna pracují s kartézskou soustavou souřadnic již v 6. ročníku (Coufalová et al., 2007a, s. 129) ještě před zavedením celých záporných čísel, souřadnice bodů jsou zde zadávány pouze z oboru přirozených čísel. V učebnici (Herman et al., 1998) pro primy osmiletých gymnázií nalezneme zavedení pravoúhlé soustavy souřadnic bezprostředně po výkladu záporných čísel, naopak třeba v řadě učebnic z nakladatelství Prodos či SPN se práce se soustavou souřadnic objeví poprvé až ve vyšším ročníku v souvislosti s grafem funkce.

Zařazení úloh z oblasti syntetické rovinné geometrie, v nichž se pracuje také se soustavou souřadnic, je v učebnicích ojedinělé a v kurikulu k tomuto nenalezneme oporu vůbec. Přitom určitá propojení se přímo nabízí. Již na prvním stupni se žáci učí rýsovat osově souměrné útvary, na druhém stupni se přidávají konstrukce ve středové souměrnosti a posunutí. V úlohách tohoto typu pracujeme často ve čtvercové síti, k volbě os a použití souřadnic mnoho nechybí. Úlohy na téma souměrnosti s body zadanými pomocí souřadnic se však v učebnicích vyskytují jen zřídka. Při zavedení posunutí se na úrovni základní školy pracuje s pojmem „orientovaná úsečka", zde se objevuje příležitost k propedeutice pojmu vektor a k intuitivnímu pochopení souřadnic vektoru. Její využití jsme však zaznamenaly pouze v (Hejný & Šalom, 2017, s. 28–29) a částečně v (Coufalová et al., 2007b, s. 167). Na procesuální budování představy o volném vektoru pomocí čtverečkovaného papíru upozorňují také odborné publikace, například (Jirotková, 2010). Další přímou souvislost spatřujeme v úlohách, v nichž se pracuje s rovinnými útvary jako trojúhelník, čtyřúhelník, kruh aj. Soustavu souřadnic můžeme zapojit při upevňování učiva o vlastnostech těchto útvarů nebo při úlohách zaměřených na výpočet jejich obvodu a obsahu. V některých řadách učebnic jsou takové úlohy zastoupeny v řádu jednotek, v jiných (Prodos, SPN) vůbec, v dalších (například Prometheus – řada od O. Odvárka a J. Kadlečka i řada od A. Šarounové a kol.) jen v souvislosti s obvody a obsahy v 8. ročníku, ale ne s vlastnostmi útvarů v 7. ročníku či dříve. Další přímou spojitost spatřujeme s tématem „Pýthagorova věta", v rámci jehož procvičení bývá v úlohách opět velmi často zařazována čtvercová síť.

Nedostatek vhodných učebních materiálů nás přivedl k myšlence vytvořit sadu vlastních úloh, v nichž by byla zapojena kartézská soustava souřadnic, pracovalo by se se souřadnicemi bodu nebo by se žáci intuitivně a s důrazem na vizuální stránku seznamovali se souřadnicemi vektoru. Následně jsme tyto úlohy zařadily do výuky a pozorovaly jsme, jak si s nimi žáci různých ročníků poradí a zda má jejich řešení nějaký přínos.

Použité metody

Kromě analýzy dostupných učebních materiálů a aktuálních kurikulárních dokumentů včetně katalogů požadavků k přijímacím zkouškám apod. předcházelo přípravě úloh několikaleté osobní pozorování potíží středoškoláků s učivem analytické geometrie. Ve školním roce 2016/2017 byl proveden malý experiment, v jedné třídě vyššího gymnázia byla vyzkoušena změna přístupu k výuce tohoto tématu. Oproti dosavadním zkušenostem byl v této třídě kladen větší důraz než obvykle na propojení učiva analytické geometrie s geometrií syntetickou, po žácích bylo důsledně vyžadováno kreslení názorných náčrtků i rýsování v soustavě souřadnic. Více úloh bylo řešeno na základě dřívějších znalostí planimetrie a až poté byly odvozeny vztahy pro výpočty metodami analytické geometrie. Žákům byly v zájmu získání podkladů pro závěrečné hodnocení zadávány didaktické testy stejné jako třídám v předchozích letech, výsledky těchto testů pak byly porovnány s výsledky jiných tříd z předchozích let.

Nově vytvořené a zde představované úlohy byly použity ve výuce v různých ročnících nižšího i vyššího gymnázia (specifikace ročníků viz dále) a v různých situacích, někdy byla úlohám věnována celá vyučovací hodina, jindy jen její část. V některých třídách byla s žáky přímo o řešení úloh vedena diskuse, v jiných pracovali samostatně a zaznamenávali svá řešení do připravených pracovních listů, popřípadě řešili úlohy samostatně jako domácí úkol. Skupiny žáků byly vybrány na základě dostupnosti. Jednalo se o třídy vedené různými vyučujícími. Poté byly s žáky vedeny besedy o jejich názoru na předložené úkoly. Samostatná práce byla následně vyhodnocena, metody žákovských přístupů k řešení úloh stejně jako způsob, jak bylo s úlohami v hodině pracováno, jsou rozebrány dále.

Představení úloh

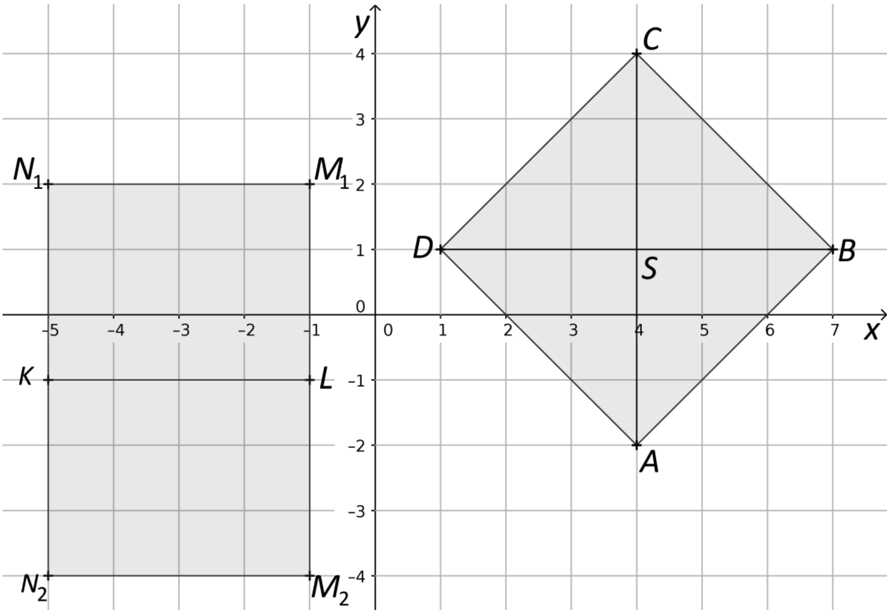
Úlohy obdobné těm, kterými se v tomto článku zabýváme, vznikaly v našem portfoliu postupně řadu let. Inspirace byly nalézány v již zmíněných učebnicích, na internetu, ale vyplývaly také bezprostředně z potřeb žáků zjištěných v průběhu samotné výuky.

Prvním impulsem k systematické práci bylo vedení přípravných kurzů k přijímacím zkouškám na šestiletá gymnázia organizovaných Gymnáziem Na Pražačce v Praze, na němž se obě autorky od roku 2014 aktivně podílely. Jelikož v té době škola využívala služeb společnosti Scio, připravovaly jsme pro naše žáky procvičovací úlohy na základě katalogu požadavků pro Scio testy, v nichž se mimo jiné úlohy pracující se soustavou souřadnic pravidelně opakovaly. V průměru 80 % žáků 7. ročníků různých pražských základních škol, kteří naše kurzy navštěvovali, s podobnými úlohami nemělo žádné předchozí zkušenosti.

V následujících letech jsme pak zdokonalovaly vlastní výukové materiály pro přípravný kurz a dále jsme ověřovaly začlenění těchto základoškolských úloh do výuky matematiky na vyšším gymnáziu, kde je standardně zařazena analytická geometrie v rovině. Motivací pro větší rozpracování souboru úloh a jejich vyzkoušení s žáky v dalších ročnících vzdělávání bylo zapojení obou autorek do projektu OP VVV (výzva SC2, vzdělávací modul Matematická gramotnost) v roce 2017. Téma navíc zaujalo dalšího ze zapojených učitelů, který rovněž přispěl několika vlastními úlohami na dané téma a jejich vyzkoušením ve svých hodinách matematiky.

V rámci zmíněného projektu OP VVV byla vytvořena řada úloh, z nichž některé jsou si podobné a slouží k dalšímu procvičení učiva. Pro ilustraci zde představíme pouze výběr několika zástupných. Úlohy byly při jejich zadávání žákům různě řazeny do pracovních listů s předpřipraveným obrázkem se soustavou souřadnic,

Obrázek 1. Zakreslení útvarů z úloh 1.1 (vpravo) a 1.2 (vlevo)



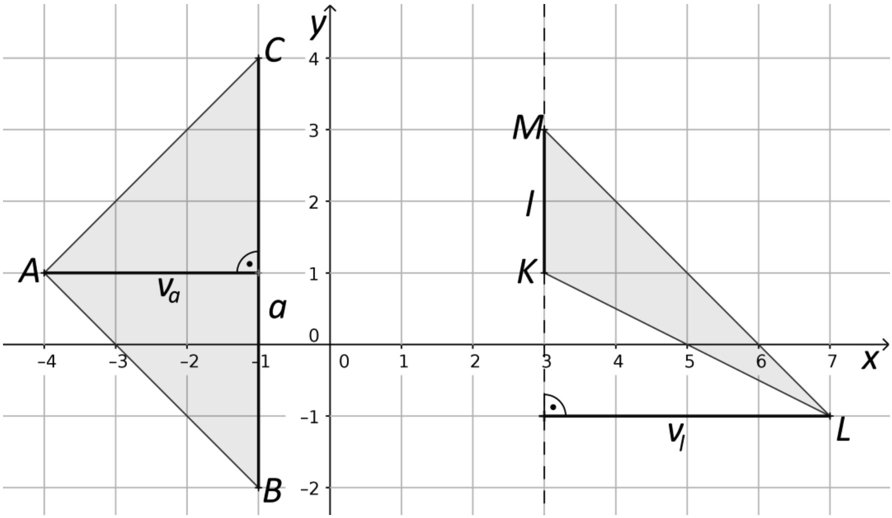
dle reakcí žáků byly postupně doplňovány a upravovány.[1] Vybrané pracovní listy byly již prezentovány jako celek v únoru 2018 v rámci pracovní dílny na konferenci Dva dny s didaktikou matematiky (Moravcová, & Kaňková, 2018). Pro potřeby tohoto článku jsou zadání úloh zestručněna, graficky sjednocena a je z nich vynechán prostor pro odpovědi žáků. V úlohách, v nichž pracujeme s metrikou, předpokládáme, že jednotkou na obou souřadnicových osách je 1 cm.

Úlohy zaměřené na vlastnosti rovinných útvarů a jejich obsahy a obvody

Úloha 1.1 (obr. 1 vpravo): Jsou dány body *A* [4; −2] a *C* [4; 4]. Úsečka *AC* je úhlopříčkou čtverce *ABCD*. Do připravené soustavy souřadnic čtverec *ABCD* narýsujte. Určete souřadnice bodů *B*, *D*, souřadnice středu souměrnosti S čtverce a vypočítejte obsah čtverce *ABCD*.

[1] Byly zpřesněny formulace úloh, odstraněny překlepy, upraveno pořadí v rámci pracovních listů či doplněny podúlohy, které slouží jako nápověda k další podúloze.

Obrázek 2. Zakreslení trojúhelníků z úlohy 1.3



Úloha 1.2 (obr. 1 vlevo): Jsou dány body *K* [−5; −1] a *L* [−1; −1]. Úsečka *KL* je stranou obdélníku *KLMN*. Určete souřadnice zbývajících vrcholů obdélníku, jestliže jeho obsah je 12 cm^2. Obdélník zakreslete. Najděte všechna řešení.

Úloha 1.3 (obr. 2): Do soustavy souřadnic znázorněte body *A* [−4; 1], *B* [−1; −2], *C* [−1; 4], *K* [3; 1], *L* [7; −1], *M* [3; 3] a narýsujte trojúhelníky *ABC* a *KLM*. Určete dále vlastnosti obou trojúhelníků,[2] v každém trojúhelníku barevně vyznačte a popište stranu a k ní příslušnou výšku, kterou můžete co nejvýhodněji použít k výpočtu obsahu trojúhelníku a vypočítejte obsahy obou trojúhelníků.

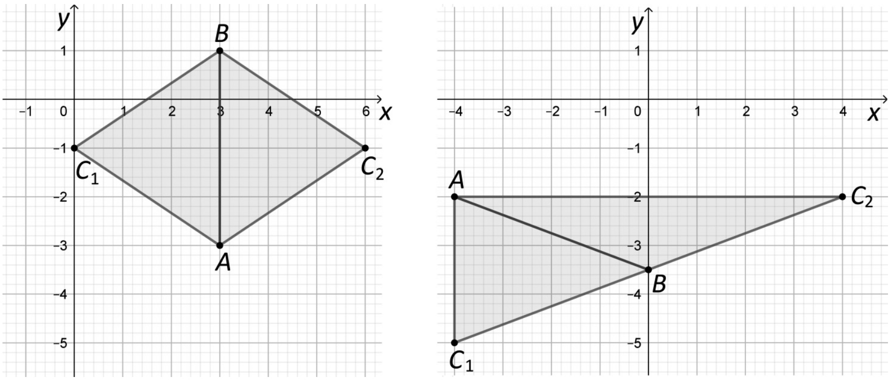
Úloha 1.4 (obr. 3): Určete celočíselné souřadnice bodu *C* tak, aby obsah rovnoramenného trojúhelníku *ABC* byl 6 cm^2, jestliže: a) *A* [3; –3], *B* [3; 1]; b) *A* [–4; –2], *B* [0; –3,5].

Úlohy o shodných zobrazeních

Úloha 2.1 (obr. 4): Je dán trojúhelník *ABC*, kde *A* [3; 2], *B* [5; 1], *C* [4; 5]. Zapište sou-

[2] Smyslem této otázky bylo navést žáky k tomu, aby si uvědomili, čím jsou zakreslené trojúhelníky specifické (pravoúhlost aj.) a tyto vlastnosti pak využili při výpočtu jejich obsahů. Žáci skutečně zpravidla charakterizovali trojúhelníky podle délek stran a velikostí vnitřních úhlů, jen někteří požadovali po vyučujícím upřesnění otázky.

Obrázek 3. Zakreslení rovnoramenných trojúhelníků dle zadání úlohy 1.4 (a) vlevo, b) vpravo)



řadnice vrcholů trojúhelníku $A'B'C'$, který získáme a) jako obraz trojúhelníku ABC v osové souměrnosti s osou y; b) jako obraz trojúhelníku ABC ve středové souměrnosti se středem v počátku soustavy souřadnic; c) jako obraz trojúhelníku ABC ve středové souměrnosti se středem v bodě S [3; 3].

Příprava pro práci s vektory

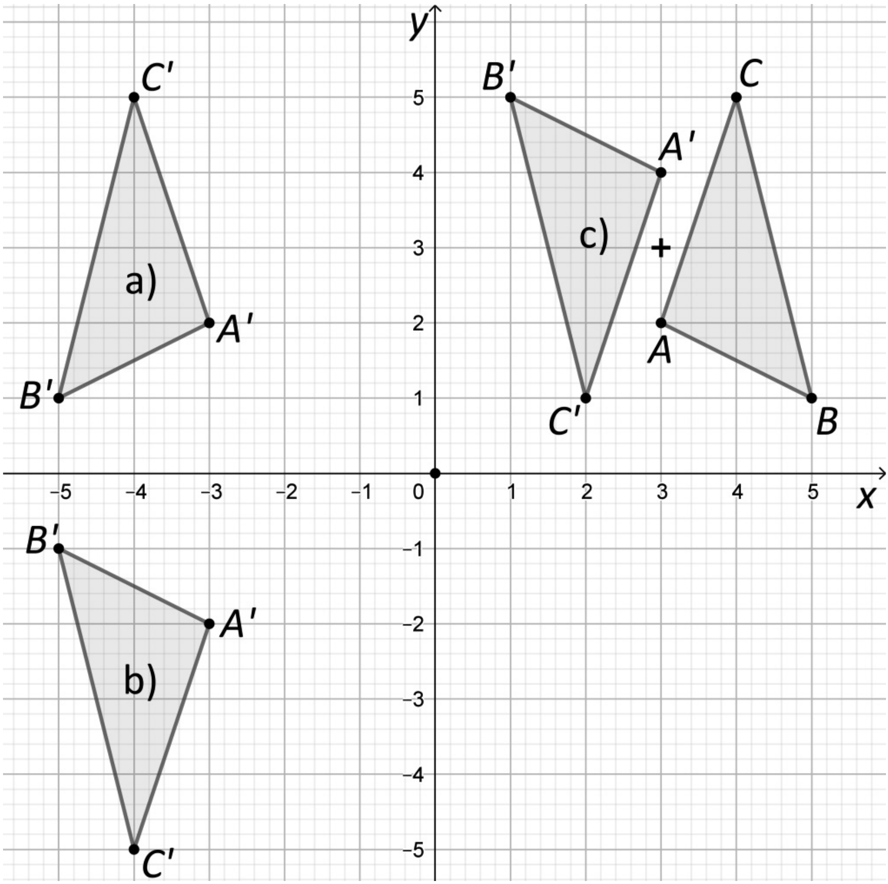
Úloha 3.1: Procházky soustavou souřadnic 1

1) Na obrázku (obr. 5 vlevo) je zakreslena procházka po čtvercové síti s počátkem v bodě [0; −2], kterou bychom zapsali takto: $+2x$; $+y$; $-x$; $+2y$; $+x + y$; $+2x$; $-2x + 2y$; $-x$; $+y$; $-x + y$. Dokreslete do obrázku procházku se stejným počátečním bodem tak, aby byla osově souměrná podle osy y s již zakreslenou. Tuto novou procházku zapište. Co vám obrázek připomíná?
2) Zakreslete procházku z počátečního bodu [−3; −2]: $+2x$; $+2x + 2y$; $-x + y$; $+x + y$; $-2x + 2y$; $+2x + y$; $+2x$; $-2y$; $-x - y$; $+y$; $-x + y$; $+x$ (obr. 5 vpravo).

Úloha 3.2: Procházky soustavou souřadnic 2

1) Na obrázku (obr. 5 vlevo) je zakreslena procházka po čtvercové síti s počátkem v bodě [0; −2], kterou bychom zapsali takto: (2, 0); (0, 1); (−1, 0); (0, 2); (1, 1); (2, 0); (−2, 2); (−1, 0); (0, 1); (−1, 1). Dokreslete do obrázku procházku se stejným počátečním bodem tak, aby byla osově souměrná podle osy y s již zakreslenou. Tuto novou procházku zapište. Co vám obrázek připomíná?
2) Zakreslete procházku z počátečního bodu [−3; −2]: (2, 0); (2, 2); (−1, 1); (1, 1);

Obrázek 4. Zakreslení obrazů trojúhelníku ABC dle zadání úlohy 1.4 (a) vlevo, b) vpravo



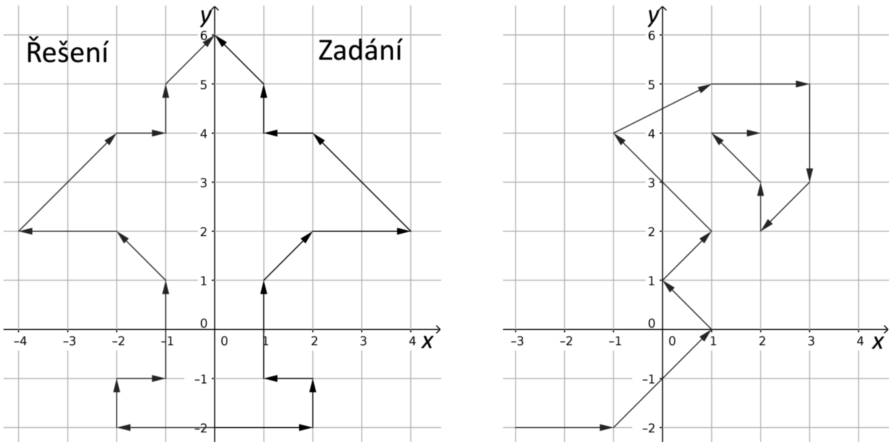
(−2, 2); (2, 1); (2, 0); (0, −2); (−1, −1); (0, 1); (−1, 1); (1, 0) (obr. 5 vpravo).

Úlohy 3.1 a 3.2 si graficky odpovídají, liší se jen způsobem zadání.

Hra „formulky“

Hra s pracovním názvem „formulky“ je vhodná pro skupinovou práci (ideálně pro 3 až 4 žáky, ale lze ji hrát i ve dvojici nebo ve větším počtu žáků). Třídě je třeba při prvním zařazení této činnosti

Obrázek 5. Procházky soustavou souřadnic (vlevo úlohy 3.1.1 a 3.2.1, vpravo úlohy 3.1.2 a 3.2.2)



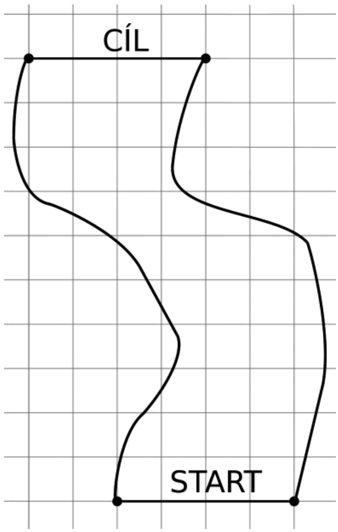
nejprve pečlivě vysvětlit princip a domluvit detaily pravidel (hra umožňuje určitou volnost pravidel závislou na tom, jak se hráči mezi sebou domluví). Zadání je vhodné předem připravit a nakopírovat, aby jej měly všechny skupiny stejné.

Příprava zadání: Na čtverečkový papír připravíme libovolnou dráhu včetně vyznačení startovní a cílové čáry (obr. 6), kudy mají „závodní formule projet“ (odtud název hry).

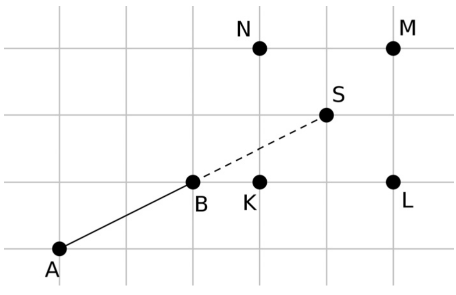
Obecný princip: V každém kole každý z hráčů nakreslí jeden tah (úsečku) své trasy. Hráči se pravidelně střídají. Každý tah vede vždy z jednoho mřížového bodu do jiného dle stanovených pravidel (viz dále). Vyhrává ten, kdo na co nejmenší počet tahů (tedy jako první) projede cílem. Trasy se mohou libovolně křížit, částečně kopírovat, více hráčů se může potkat zároveň ve stejném mřížovém bodě (srážky neuvažujeme). Před začátkem hry je třeba stanovit sankci pro situaci, kdy hráč vyjede z dráhy.

Pravidla pro jednotlivé tahy: Začíná se v libovolném bodě startovní čáry (každý z hráčů si vybere, kde začne; více hráčů může zvolit stejný bod). První tah je veden po jedné straně čtverečku kolmo ke startovní čáře. Každý další tah je veden vždy z posledního dosaženého mřížového bodu do jednoho z pěti mřížových bodů, které získáme následovně (obr. 7): první možný bod (nazvěme jej *S*) je koncový bod tahu, který by byl stejný jako předchozí tah téhož hráče; další čtyři přípustné mřížové body jsou vrcholy čtverce se středem v bodě *S* a stranou dlouhou dva čtverečky. Z pěti možných bodů lze použít jen ty, které leží ve vyznačené dráze. V případě, že nemůžeme použít žádný z naznačených bodů, aniž by for-

Obrázek 6. Ukázka připraveného zadání pro hru „formulky“



Obrázek 7. Podmínky pro další tah ve hře „formulky“



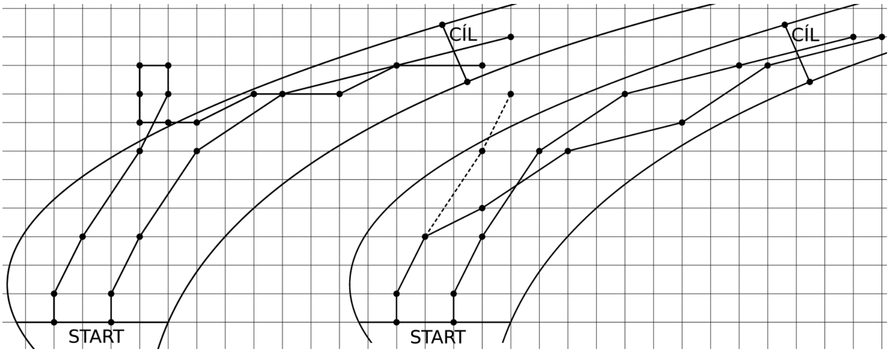
mule opustila dráhu, následuje sankce dle předem domluvených pravidel.

Návrhy možných sankcí za vyjetí z dráhy (řazeny od nejmírnějších[3]):

1) hráč hraje dál, ale musí volit tahy tak, aby postupně zpomalil, otočil se a vrátil se do dráhy přibližně v místě, kde z ní vyjel (obr. 8 vlevo);

3 Je-li dráha krátká, bývá naopak sankce 2) mírnější než sankce 1).

Obrázek 8. Hrací plán „formulek" se záznamem dvou her dvou hráčů



2) hráč v tomto kole (popřípadě více kol) nehraje a v dalším kole pokračuje z libovolného mřížového bodu, v němž byl v nějakém ze svých předchozích tahů, avšak změní svou trasu tak, aby předešel opuštění dráhy (obr. 8 vpravo);
3) hráč musí jet znovu od startu, popřípadě je zcela diskvalifikován.

Žákovská řešení úloh

Nyní se podrobněji podíváme, jak předložené úlohy řešili žáci různých ročníků. Většina úloh byla vyzkoušena s žáky primy, sekundy, tercie a dvou tříd kvinty šestiletého Gymnázia Na Pražačce v Praze 3 v průběhu školního roku 2017/2018, několik těžších úloh řešila také sexta této školy, což je tatáž třída, v níž byl v předchozím školním roce vyzkoušen upravený přístup k výuce analytické geometrie. S touto třídou byly v průběhu roku 2016/2017 opakovaně zkoušeny i různé obměny hry „formulky". Pro srovnání byly některé úlohy zadány i na čtyřletém Gymnáziu Třeboň žákům 3. ročníku.

Žákovská řešení úlohy 1.1 (čtverec a jeho obsah)

S úlohou 1.1 se žáci primy setkali již na podzim 2017 v rámci opakování učiva základní školy. Z 25 žáků správně určilo souřadnice bodů A, B, S i obsah čtverce 22 žáků. Pro výpočet obsahu 12 žáků použilo metodu rozkladu čtverce pomocí jeho úhlopříček na čtyři shodné pravoúhlé trojúhelníky (v podstatě lze říci, že využili známé délky úhlopříček čtverce); 8 žáků spočítalo počet celých čtverečků a „půlčtverečků"; 2 žáci využili k výpočtu Pýthagorovu větu, kterou již znali ze základní školy a pomocí níž zjistili délku strany čtverce, kterou pak umocnili na druhou. Poslední 3 žáci pouze zakreslili čtverec a zapsali souřadnice bodů B, D a S, o výpočet obsahu se však nepokusili.

Tabulka 1. Relativní četnosti žákovských řešení úlohy 1.1

	součet čtverečků	**délka úhlopříček**	**Pýthagorova věta**	**bez postupu**	**měření strany**	**strana 3 cm**	**jiná chyba**	**nevyřešeno**
prima	32 %	48 %	8 %	–	–	–	–	12 %
sekunda	–	14 %	14 %	5 %	43 %	14 %	–	10 %
tercie	–	25 %	15 %	10 %	–	30 %	5 %	15 %
kvinty	–	15 %	15 %	13 %	15 %	23 %	–	20 %

Pozn. První čtyři sloupce (*součet čtverečků*, *délka úhlopříček*, *Pýthagorova věta*, *bez postupu*) odpovídají správným řešením úlohy, sloupec *měření strany* zahrnuje výsledky, které byly vlivem měření nepřesné, další dva sloupce (*strana 3 cm* a *jiná chyba*) odpovídají špatným řešením a poslední sloupec *nevyřešeno* zahrnuje žáky, kteří úlohy neřešili nebo nedořešili.

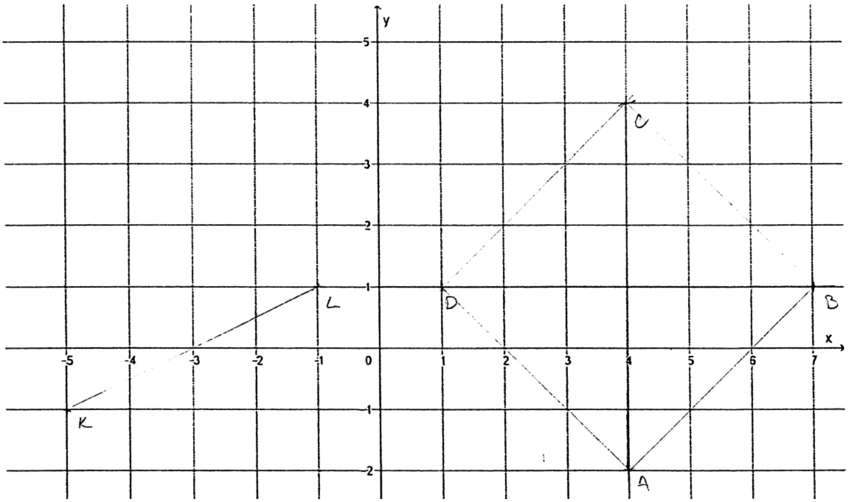
V sekundě byla tato úloha zařazena v lednu 2018 v rámci opakování obvodů a obsahů rovinných útvarů, které předcházelo nově probírané látce o površích a objemech těles. Z celkového počtu 21 žáků úlohu zcela správně vyřešilo pouze 7, z toho 3 použili Pýthagorovu větu, 3 vztah „obsah = polovina součinu délek úhlopříček“ a 1 žák uvedl pouze výsledek bez postupu. Dalších 12 žáků chtělo využít vztah „obsah = druhá mocnina délky strany“, avšak 3 z nich se domnívali, že čtverec má stranu dlouhou 3 cm, zbylých 9 žáků stranu v obrázku nepřesně změřilo a pracovali s naměřeným údajem. Zbylí 2 žáci úlohu neřešili nebo nevyřešili vůbec.

V tercii tuto úlohu řešilo 20 žáků v březnu 2018. Úloha jim byla (spolu s úlohami 1.2 a 1.3) zadána jako domácí úkol po stručném zopakování učiva planimetrie základní školy, které předcházelo středoškolské planimetrii. Pouze 8 žáků úlohu vyřešilo kompletně správně, z toho 5 využilo délky úhlopříček, 3 Pýthagorovu větu a 2 neuvedli žádný postup. Podobně jako v sekundě se 6 žáků domnívalo, že strana čtverce má délku 3 cm; 1 žák si čtverec špatně zakreslil (zaměnil x-ové a y-ové souřadnice daných bodů) a rovněž délku jeho strany pokládal rovnou 3 cm; 3 žáci úlohu neřešili.

Žákům obou kvint byla úloha (opět spolu s úlohami 1.2 a 1.3) zadána v dubnu 2018 s cílem připomenout kartézskou soustavu souřadnic na úvod do tématu analytická geometrie v rovině. Úlohu celkem řešilo 40 žáků, z toho 6 ji vyřešilo správně pomocí délek úhlopříček, 6 pomocí určení délky strany čtverce Pýthagorovou větou a 5 bez jasného postupu. Přibližnou délku strany zjištěnou měřením dosadilo 6 žáků; 9 žáků pracovalo s nesprávnou délkou strany 3 cm; 6 žáků úlohu nedořešilo, pouze sestrojili čtverec; 2 ji neřešili vůbec.

Se zakreslením čtverce a určením souřadnic požadovaných bodů žáci v žád-

Obrázek 9. Ukázka žákovského řešení úlohy 1.2 (vlevo) – nesprávně zakreslené zadání



ném ročníku problémy neměli. Potíže se však vyskytly při výpočtu obsahu. Pro větší přehlednost uvádíme přehled přibližných relativních četností výskytů jednotlivých žákovských přístupů k určení obsahu čtverce v tabulce 1. Z tabulky je patrné, že ve vyšších ročnících žáky nenapadlo použít prosté sečtení čtverečků a naopak preferovali Pýthagorovu větu (kterou se žáci primy ještě neučili). V sekundě a kvintě se objevil nepřesný přístup metodou měření, který mohl souviset s tím, že v předchozích hodinách žáci řešili konstrukční úlohy. Zarážející je, že se zvyšujícím se ročníkem roste tendence pokládat stranu čtverce za úsečku dlouhou 3 cm nebo úlohu raději vůbec neřešit.

Žákovská řešení úlohy 1.2 (obdélník)

Úlohu 1.2 řešilo 21 žáků primy a 21 žáků sekundy v rámci vyučovací hodiny v lednu 2018. Z toho 19 žáků primy zakreslilo správně obě řešení, 2 z nich však nezapsali souřadnice všech nalezených vrcholů obdélníku. Zbývající 2 žáci našli jedno řešení. Z 21 žáků sekundy 13 nalezlo i správně zapsalo obě řešení, 4 určili jen jedno řešení a 4 chybně znázornili zadanou úsečku KL.

V tercii odevzdalo kompletní správné řešení 6 žáků z 20, další 4 měli obě řešení sestrojena, ale nezapsali souřadnice nalezených vrcholů, 3 žáci našli jen jedno řešení. Zbylých 7 žáků špatně sestrojilo zadanou úsečku *KL* nebo nesprávně

Tabulka 2. Relativní četnosti žákovských řešení úlohy 1.2

	obě řešení se zápisem	**obě řešení bez zápisu**	**jedno řešení**	**jiné zadání či špatné řešení**	**neřešili**
prima	81 %	10 %	10 %	–	–
sekunda	62 %	–	19 %	19 %	–
tercie	30 %	20 %	15 %	35 %	–
kvinty	25 %	13 %	15 %	18 %	20 %

Pozn. První dva sloupce (*obě řešení se zápisem*, *obě řešení bez zápisu*) zahrnují žáky, kteří do obrázku zakreslili obě řešení. Ve třetím sloupci jsou uvedeni žáci, kteří nalezli pouze jedno správné řešení, ve čtvrtém jsou zastoupeni ti, kteří si špatně zakreslili zadané body nebo sestrojili obdélník jiných rozměrů a v posledním jsou uvedeni žáci, kteří úlohu neřešili nebo nedořešili.

zakreslili výsledný obdélník (zpravidla o 1 cm zkrátili délku strany *LM*).

V kvintách úlohu zcela správně vyřešilo 10 žáků ze 40; obě řešení, avšak bez zápisu souřadnic hledaných bodů, sestrojilo dalších 5 žáků; 10 nalezlo jen jedno řešení; 7 špatně zakreslilo zadanou úsečku (obr. 9); 8 úlohu vůbec neřešilo.

V této úloze nás především zajímalo, zda žáci naleznou obě možná řešení. Z tabulky 2, v níž jsou opět uvedeny přibližné relativní četnosti jednotlivých odpovědí, je patrné, že největší úspěšnosti dosáhli žáci primy a s rostoucím ročníkem se úspěšnost žáků snižuje. Pouze mezi nejstaršími žáky se objevila skupinka těch, kteří úlohu vůbec neřešili.

Žákovská řešení úlohy 1.3 (trojúhelníky)

Úlohu 1.3 řešily stejné skupiny žáků zároveň s úlohou 1.2. V případě trojúhelníku *ABC* byla úspěšnost poměrně vysoká, popřípadě se vyskytly chyby obdobné chybám při výpočtu obsahu čtverce v úloze 1.1. Zajímavější však byly přístupy k hledání obsahu trojúhelníku *KLM*, neboť žáky zřejmě zaskočila jeho tupoúhlost.

V primě 11 žáků z 21 vyřešilo úlohu správně za použití strany *KM* a k ní příslušné výšky, z toho 1 žák však v obrázku vyznačil jinou dvojici strany a výšky. Další 4 žáci dopočítali obsah trojúhelníku *KLM* odečtením obsahů dvou pravoúhlých „rohových“ trojúhelníků od opsaného čtverce o straně dlouhé 4 cm; 2 žáci úlohu vyřešili, aniž by uvedli postup; 4 žáci obsah nevypočítali, avšak 3 z nich správně vyznačili všechny výšky daného trojúhelníku.

V sekundě byl bohužel rozdán pracovní list s tiskovou chybou, u bodu *L* byly uvedeny souřadnice [7; 1], což by výrazně usnadnilo řešení. Na chybu však byli žáci po rozdání pracovního listu upozorněni a měli si ji opravit. Úlohu správně pomocí strany *KM* a příslušné výšky vyřešilo 6 žáků z 21. Pomocí strany *LM* a odpovída-

Tabulka 3. Relativní četnosti žákovských řešení úlohy 1.3

	se stranou KM	opsaný čtverec	se stranou LM	bez postupu	výška na KM	špatný výsledek	neřešeno
prima	52 %	19 %	–	10 %	14 %	–	5 %
sekunda	50 %	–	8 %	–	–	16 %	25 %
tercie	15 %	–	15 %	15 %	–	30 %	25 %
kvinty	15 %	–	3 %	–	–	53 %	30 %

Pozn. První čtyři sloupce zahrnují žáky, kteří určili obsah trojúhelníku *KLM* správně. V prvním sloupci (*se stranou KM*) jsou uvedeni ti, kteří použili pro výpočet délku strany *KM* s příslušnou výškou, ve druhém (*opsaný čtverec*) ti, kteří odečetli obsahy pravoúhlých trojúhelníků od opsaného čtverce, ve třetím (*se stranou LM*) ti, kteří použili délku strany *LM* spolu s příslušnou výškou a ve čtvrtém (*bez postupu*) ti, kteří uvedli jen výsledek bez zřetelného postupu a ani nevyznačili žádnou výšku v obrázku. Ve sloupci (*výška na KM*) uvádíme žáky, kteří v obrázku zvýraznili výšku na stranu *KM*, ale obsah již nepočítali. V předposledním sloupci (*špatný výsledek*) jsou zahrnuti žáci, kteří úlohu vypočítali špatně, a konečně v posledním ti, kteří obsah nepočítali vůbec a ani nevyznačili výšku na stranu *KM*

jící výšky se úlohu pokusili řešit 3 žáci, z nichž ke správnému výsledku dospěl úspěšně pomocí Pýthagorovy věty jen 1 žák; další 2 potřebné vzdálenosti jen odměřili z obrázku; 3 žáci úlohu vůbec neřešili; 9 žáků bohužel ignorovalo pokyn k opravě zadání a pracovalo s jiným trojúhelníkem. Tento omyl však nahrál při společném opravování úlohy následné diskusi, proč v obou případech mají trojúhelníky stejný obsah.

V tercii stranu *KM* použili pro výpočet 3 žáci z 20; další 3 za pomoci Pýthagorovy věty došli ke správnému řešení pomocí strany *LM*; 4 žáci v obrázku zvýraznili výšku na stranu *LM*, avšak úlohu nedopočítali. Ve 3 případech se objevil správný výsledek bez postupu, avšak jelikož žáci řešili úlohu jako domácí úkol, je možné, že ji opsali; 5 žáků nevyznačilo žádnou výšku a výsledek uvedli špatně bez zřejmého postupu; 2 žáci úlohu vůbec neřešili.

V kvintách 6 žáků ze 40 vypočítalo obsah správně za pomoci strany *KM* a 1 žák s využitím strany *LM*. O výpočet pomocí strany *LM* a příslušné výšky se pokoušelo také dalších 18 žáků, avšak dopustili se jedné nebo i více numerických chyb, 6 z nich straně *LM* přiřadilo délku 4 cm a výšce na tuto stranu délku 1 cm; 3 žáci dosadili délky stran do nesmyslného vztahu „obsah = součin délek stran“, stejné chyby se tito žáci dopustili i při výpočtu obsahu trojúhelníku *ABC*.

Pro lepší přehlednost jsou metody žáků opět shrnuty v tabulce relativních četností (tab. 3). V případě sekundy vztahujeme relativní četnosti pouze k těm žákům, kteří si opravili zadání dle pokynů učitele. V úloze nás zajímalo, zda žáci objeví vhodnou dvojici strany *KM* a příslušné výšky, jejichž délky znají, přestože výška leží vně trojúhelníku. Nápovědou měl být úkol, aby „vhodnou“ stranu a výšku v obrázku nejprve vyznačili. Z tabulky 3 je patrné, že, obdobně jako u předchozích úloh, s rostoucím ročníkem rapidně klesá úspěšnost žáků. Za povšimnutí stojí, že pouze žáci primy použili metodu odčítání od obsahu opsaného čtverce. Starší žáci se častěji snažili pro výpočet obsahu trojúhelníku *KLM* použít stranu *LM* a k ní příslušnou výšku, která jako jediná ležela uvnitř trojúhelníku, přestože pak museli složitěji dourčit délky potřebných úseček.

Žákovská řešení úlohy 1.4 (rovnoramenný trojúhelník)

Úlohu 1.4 považujeme za jednu z obtížnějších, zejména její část b), proto byla zatím vyzkoušena pouze s žáky vyššího gymnázia. Řešili ji v lednu 2018 žáci 3. ročníku čtyřletého Gymnázia Třeboň v jedné z úvodních hodin analytické geometrie a v dubnu 2018 žáci sexty šestiletého Gymnázia Na Pražačce v Praze v rámci maturitního opakování.

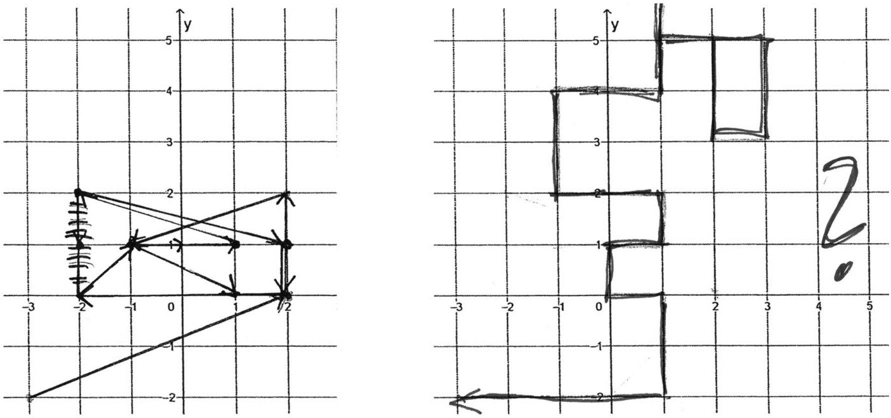
V obou třídách měli žáci k dispozici čtverečkovaný papír a nejprve pracovali samostatně. V první třídě si poté společně kontrolovali svá řešení s vyučujícím, nemáme tedy zaznamenány přesné počty jednotlivých žákovských přístupů k řešení, nicméně přítomný pedagog si zapsal podstatné překážky, které vypozoroval při sledování samostatné práce. Několik žáků si na začátku nenakreslilo obrázek vůbec, další sice ano, avšak bez soustavy souřadnic. Dva žáci zformulovali myšlenku, že pokud známe základnu rovnoramenného trojúhelníku, pak hlavní vrchol musí ležet na její ose. Nikdo však neuvažoval o zadané straně *AB* jako o rameni trojúhelníku, což bylo zřejmě příčinou hromadného neúspěchu při řešení části b), bez nápovědy učitele úlohu nikdo nevyřešil. Mnozí se snažili použít vektory (pro ně poslední probíraná látka), aniž by věděli, co a proč s nimi vlastně počítají.

Ve druhé třídě žáci rovněž pracovali samostatně, kdo úlohu vyřešil, nechal si ji ihned zkontrolovat vyučujícím a pokud ji měl špatně, mohl si ji opravit. V části a) napoprvé 5 žáků z 23 uvedlo pouze jedno řešení, po upozornění okamžitě určili i druhé. Ostatní měli úlohu napoprvé správně. V úloze b) zcela bez nápovědy vyřešilo úlohu 11 žáků, jedno řešení objevilo dalších 5 žáků. Zbylých 7 žáků potřebovalo nápovědu v tom smyslu, že *AB* nemusí být základnou trojúhelníku. Každý bez výjimky však začal obrázkem s kartézskou soustavou souřadnic a pouze dva žáci zkoušeli sestavit soustavu rovnic a pracovat čistě analytickou metodou (analytickou geometrii v rovině již měli kompletně probranou).

Žákovská řešení úlohy 2.1 (osová a středová souměrnost)

Úlohu 2.1 řešilo 26 žáků primy šestiletého gymnázia v únoru 2018 samostatně při suplované hodině. S osovou souměrností neměli potíže, nesprávné řešení se objevilo jen ve 4 případech, v nichž si

Obrázek 10. Ukázka nesmyslných žákovských řešení úlohy 3.2



však žáci sestrojili špatně již zadání (2 z nich zaměnili x a y, další dva se spletli v zakreslení jednoho z bodů) a to osově souměrně správně zobrazili.

Potíže nastaly v částech b) a c), kde bylo úkolem zkonstruovat obraz trojúhelníku ve středové souměrnosti. Úkol b) správně vyřešilo 11 žáků, úkol c) 8 žáků (tito žáci tvořili podmnožinu těch, kteří zvládli část b). V úkolu b) 9 žáků sestrojilo trojúhelník osově souměrný podle osy x, další 3 se sice pokoušeli o správný princip středové souměrnosti, avšak díky nepřesnosti rýsování a slepé důvěře v konstrukční řešení nepodložené žádnou další úvahou jim zobrazené body vyšly o 0,5 až 1 cm jinak. Ostatní rovnou prohlásili, že si středovou souměrnost nepamatují. V úkolu c) pak byla situace obdobná, pouze narostl počet nepřesných řešení získaných čistě konstrukčně na úkor správných odpovědí.

Žákovská řešení úloh, které jsou přípravou pro práci s vektory

Úlohy 3.1 a 3.2 jsou v podstatě totožné, liší se pouze způsobem zápisu. Tyto úlohy byly připraveny s cílem vybudovat v žácích představu o volném vektoru dříve, než je exaktně zaveden v analytické geometrii na střední škole. Pro mladší žáky je vhodnější varianta 3.1, neboť s algebraickými výrazy se již setkali.[4] Pro starší žáky můžeme použít obě verze, přičemž varianta 3.2 má přímou souvislost se zápisem souřadnic vektoru, může tedy posloužit jako přirozený nácvik znázorňování vektorů.

[4] Máme na mysli žáky školy, na níž byl výzkum prováděn. Na jiných školách je třeba brát ohled na příslušný *Školní vzdělávací program* a individuálně posoudit, zda je příklad pro žáky vhodný.

Tabulka 4. Relativní četnosti žákovských řešení úlohy 3.1, respektive 3.2

	správné řešení	řešení s chybou	nesmyslné řešení	neřešeno
sekunda	73 %	27 %	–	–
kvinty	53 %	15 %	15 %	19 %

Pozn. V prvním sloupci uvádíme pouze zcela správná řešení. Ve druhém (*řešení s chybou*) pak ta, z nichž je zřejmé, že žák princip pochopil, avšak v jednom nebo více krocích se spletl, například zaměnil x a y. V třetím sloupci (*nesmyslné řešení*) jsou započítána řešení, která svědčí o naprostém nepochopení významu zápisu.

Úlohy byly zadány v lednu 2018 v sekundě a v dubnu 2018 v kvintách šestiletého gymnázia. V kvintách zatím v matematice pojem vektor a jeho souřadnice probrán nebyl. Sekunda řešila úlohu 3.1, kvinty úlohu 3.2. V obou třídách byly úlohy zadány jako samostatná práce, následně vybrány a vyhodnoceny učitelem.

V sekundě první část sestrojilo i zapsalo všech 26 žáků správně. 19 žáků uvedlo, že jim obrázek připomíná letadlo; 7 žáků napsalo, že v obrázku vidí siluetu ptáka (5 žáků uvedlo obojí); zbývajících 5 žáků na otázku, co jim obrázek připomíná, neodpovědělo. Druhou část zvládlo správně 19 žáků, 7 žáků udělalo v některém z kroků chybu.

V kvintách první část rovněž zvládli všichni správně, tj. 40 žáků. Oproti žákům sekundy nabídli žáci kvint pestřejší repertoár odpovědí na otázku, co jim obrázek připomíná. Vzpomněli si na ptáka, letadlo, šipku, německou orlici[5], tučňáka, altánek, kašnu, draka, vlaštovku, sovu, fontánu či orla. Druhou část vyřešilo bezchybně 21 žáků. 15 žáků odevzdalo chybné řešení, z toho minimálně 6 žáků evidentně vůbec nepochopilo princip zápisu (obr. 10). Zbývající 4 žáci tuto podúlohu vůbec neřešili.

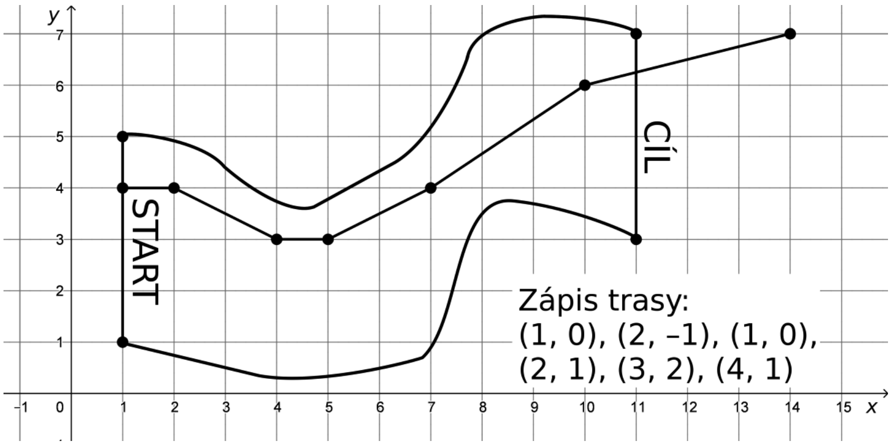
Pro snazší porovnání obou tříd uvádíme přibližné relativní četnosti jednotlivých žákovských řešení druhé části úlohy 3.1, respektive 3.2, v tabulce 4. Na první pohled je zřejmé, že mladší žáci v této úloze dosáhli lepších výsledků.

Zařazení hry „formulky“ do výuky

S touto hrou se jedna z autorek setkala v rodinném kruhu již v raném dětství jako s formou zábavy pro krácení volných chvil. V posledních cca devíti letech s ní seznamuje své žáky právě v souvislosti s procvičením znázornění vektorů v analytické geometrii. Zatím se žádný

5 Tyto odpovědi uváděli žáci třídy, která je specializovaná na výuku německého jazyka.

Obrázek 11. Hrací plán formulek se soustavou souřadnic a vektorovým zápisem trasy



žák, který by úlohu již z dřívějška znal, nenašel.

Zatímco v předchozích letech byla hře věnována vždy jen část jedné vyučovací hodiny, kdy byli žáci seznámeni s pravidly a mohli si pak chvíli ve skupinkách hru vyzkoušet, ve školním roce 2016/2017 byla v rámci již zmíněného experimentu s upraveným přístupem k výuce analytické geometrie tato hra do hodin zařazena systematičtěji. Na první hodině byla žákům vysvětlena pravidla a v zájmu jejich upevnění si žáci chvíli jen tak hráli, stejně jako tomu bylo v předchozích letech v jiných třídách. V další hodině dostali žáci nový hrací plán se závodní dráhou a navíc s vyznačenou soustavou souřadnic (obr. 11). Každý měl za úkol vymyslet co nejlepší trasu a tu pak nějak symbolicky zapsat tak, aby ji mohl snadno nadiktovat. Poté své zápisy diktovali sousedovi, aby vyzkoušeli, zda jsou pro někoho jiného srozumitelné. Aktivita předcházela zavedení souřadnic vektoru, avšak několik žáků na tento princip přišlo a třída jej přijala za nejefektivnější, pouze jsme provedli úmluvu ohledně závorkování.

Princip hry byl opakovaně využíván i v dalších hodinách, v nichž jsme se jinak věnovali vektorům, a to vždy jako rozcvička na zahájení hodiny nebo naopak jako vyplnění několika zbývajících minut ke konci hodiny. Byly vyzkoušeny různé obměny zápisů, diktáty trasy naslepo, soutěže o nalezení nejlepší trasy, práce ve skupinách i samostatně. Žáci rovněž sami aktivně navrhovali různé varianty hry.

Diskuse

Přestože byly úlohy vyzkoušeny zatím jen na malém vzorku žáků, je z jejich řešení znatelná odlišnost přístupů žáků různých ročníků. Žáci prim mají ještě v čerstvé paměti výpočty ve čtvercové síti a někteří je dokážou aplikovat i v soustavě souřadnic. Starší žáci již znají další matematický aparát a snaží se jej za každou cenu využít, místo aby hledali nejsnazší řešení. Tento jev je patrný zejména u úloh 1.1 až 1.3.

Většina testovaných žáků primy prošla našimi přípravnými kurzy, v nichž byly podobné úlohy zadávány a byly i součástí přijímacích testů nanečisto. To může být jednou z příčin jejich úspěchu. Opakovaně několik let po sobě pozorujeme, že úlohy propojující kartézskou soustavu souřadnic s planimetrií žákům sedmých ročníků základních škol, kteří naše kurzy navštěvují, činí zpočátku potíže[6], a proto těmto úlohám věnujeme v kurzech jistou pozornost.

Pro žáky mohou být předložené úlohy obtížné, neboť v sobě kombinují několik poznatků najednou. Především je zapotřebí mít představu o záporných číslech, která jsou pro žáky sedmých ročníků většinou čerstvě probranou látkou.[7] K jedné číselné ose se najednou připojí druhá a žákům se plete, ke které ose patří která souřadnice – často zaměňují x a y i kladný a záporný směr. Je tedy třeba nejprve se ujistit, že s přehledem zvládají prosté zakreslení bodu daného souřadnicemi a naopak vyčtení souřadnic zakresleného bodu z obrázku, a to včetně bodů ležících na osách soustavy souřadnic. Až poté můžeme přejít k dalším typům úloh. Přirozené propojení s rovinnou geometrií je pak logicky navazujícím krokem a lze se k němu opakovaně vracet v různých ročnících a v různých souvislostech. V případě žákovských neúspěchů je však třeba bedlivě sledovat, která konkrétní část žákům nejde – zda orientace v soustavě souřadnic nebo zda aplikace vlastností útvarů (například v úloze 1.2 bylo nutné uvědomit si několik věcí najednou – kolmost stran obdélníku, vztah pro výpočet jeho obsahu, dvě možné polohy umístění útvaru vzhledem k dané straně).

Za užitečné považujeme mimo jiné úlohy, které mají více řešení (zde například úloha 1.2). Taková úloha je přípravou na řešení polohových konstrukčních úloh, v nichž právě určení počtu řešení dělá žákům často potíže. Při klasických početních příkladech („určete šířku obdélníku, který má délku 4 cm tak, aby jeho obsah byl 12 cm^2“) se s úlohami, které mají více různých řešení, žáci tak často nesetkají. Zpočátku můžeme napovědět vhodnou formulací zadání,

---

[6] Například úlohu „Pro čtverec *ABCD* platí *B* [2; –2], D [–2; 2]. Určete délku strany čtverce. V testu nanečisto, který byl zadán v rámci přípravného kurzu pro žáky 7. ročníků základních škol na jaře roku 2018, vyřešilo správně pouze 43 % přítomných. Mnoho žáků úlohu neřešilo vůbec, vzhledem k tomu, že byla řazena jako čtvrtá v pořadí a další úlohy tito žáci vyřešené měli, je pravděpodobné, že ji úmyslně přeskočili.

[7] Záporná čísla bývají vyučována zpravidla v sedmém, někdy již v šestém ročníku základní školy.

že mají hledat více řešení (jako tomu bylo v úloze 1.2), později je vhodné od těchto nápověd pozvolna upouštět. Je však třeba stále dbát na to, aby nějaké řešení nebylo opomenuto a žáky na něj v případě potřeby upozornit. I úloha 1.1 má dvě řešení – body *B*, *D* hledaného čtverce lze prohodit. Na velikost obsahu čtverce tato záměna nemá vliv. Nikoho z testovaných žáků možnost existence druhého řešení nenapadla, a když jsme při následné diskusi s nimi na toto téma zavedli řeč (právě v souvislosti s dvěma řešeními úlohy 1.2), argumentovali konvencí popisu vrcholů útvaru proti směru hodinových ručiček. Tuto konvenci však nepovažujeme za šťastnou, neboť vede k nejasnostem právě při určování počtu řešení konstrukčních úloh nebo při popisu stěn těles.

Potíže s výpočtem obsahu tupoúhlého trojúhelníku (druhá část úlohy 1.3) nás nepřekvapily. Mohou souviset s tím, že trojúhelník nebyl prototypický (Hershkowitz, 1989), zcela jistě bylo pro žáky obtížné „vidět" v obrázku vhodnou výšku vedenou vně trojúhelníku a mnoho jich ji neodhalilo ani po upozornění, na co se konkrétně mají zaměřit.

Metody řešení úlohy 1.4 jsme porovnali u dvou skupin přibližně stejně starých žáků, přičemž druhá z nich se s podobnými úlohami v předchozím studiu setkávala častěji než první. Ukázalo se, že tyto zkušenosti měly zásadní vliv na zvolené postupy i na schopnosti žáků úlohu správně vyřešit. Problémy žáků s vnímáním strany *AB* jako ramene a nikoli základny opět patrně souvisí s prototypickým nahlížením na rovnoramenný trojúhelník.

S úlohami kombinujícími shodná zobrazení s kartézskou soustavou souřadnic máme rovněž zkušenosti z již zmíněných přípravných kurzů k přijímacím zkouškám na šestiletá gymnázia. Největší potíže mají žáci opakovaně se středovou souměrností, naopak nejlépe zvládají souměrnost osovou (tato praxe se při ověřování zde prezentovaných úloh potvrdila), ale pouze za předpokladu, že za osu souměrnosti volíme některou ze souřadnicových os. O něco těžší je situace, kdy osu zvolíme rovnoběžnou různou s osou x nebo y, a největší problémy nastávají při volbě šikmé polohy osy souměrnosti. Zdá se, že v osové souměrnosti podle souřadnicové osy žáci častěji souřadnice dopočítávají, zatímco zadá-li se jiná osa nebo středová souměrnost, začnou někteří spoléhat jen na konstrukční metodu a dosáhnou pak nepřesných výsledků, které již výpočtem neověří.

Úlohami nazvanými pracovně „procházky soustavou souřadnic" (úlohy 3.1 a 3.2) se snažíme v žácích vybudovat vizuální představu volného vektoru zadaného v souřadnicích ještě před jeho formálním zavedením. Praxe ukazuje, že pokud se omezíme na definici vektoru a vztah pro výpočet jeho souřadnic jako rozdíl koncového a počátečního bodu, žák si nevytvoří dostatečně pevnou vizuální představu a příliš rychle přechází k algoritmizaci při řešení úloh. Několik málo rychlých náčrtků situaci nezachrání. Ve třídě, v níž bylo k výuce analytické geometrie přistupováno v roce 2016/2017 experimentálně, měla většina žáků pod souřadnicemi vektoru grafickou představu dobře vybudovanou a snáze pak pracovali s vektory v souvislosti s učivem o přímkách (například nezaměňovali směrový a normálový vektor přímky, méně chybovali v úlohách o vzájemných polohách přímek atd., což bylo možné pozorovat také při porovnání didaktických testů této třídy s didaktickými testy jiných tříd vedených toutéž vyučující v předchozích letech). K tomu pravděpodobně pozitivně přispělo také opakované zařazování hry „formulky“. Naše testování ukázalo, že souvislost mezi uspořádanou dvojicí čísel a pohybem v soustavě souřadnic zvládnou bez bližšího výkladu odhalit i žáci na úrovni základní školy. Navíc je předložené úlohy bavily, zaujala je možnost přenést zápisy výrazů do grafické podoby „hezkých obrázků“. Úloha 3.2, v níž výsledný obrazec nic nepřipomínal, měla prověřit, zda správně pochopili princip symbolického zápisu. Zde se ukázalo, že větší potíže měli opět starší žáci, kteří k práci nepřistupovali s takovou koncentrací a pro řešení úloh neměli dostatečnou vnitřní motivaci (neochota pracovat je u žáků kvint zřejmá i z toho, že někteří z nich úlohy vůbec neřešili).

Dalším přínosem těchto úloh je objevování, jaký vliv na změnu souřadnic zobrazovaných „orientovaných úseček“ má skutečnost, že osou souměrnosti je souřadnicová osa, popřípadě středem souměrnosti střed v počátku soustavy souřadnic. Při následných rozhovorech žáci sekundy i kvint přišli rychle na to, že u osové souměrnosti s osou y se u x-ové souřadnice (resp. u koeficientu u výrazu s proměnnou x) mění pouze znaménko a y-ová souřadnice zůstává stejná. Žáci posléze řešili podobnou úlohu, v níž byl konstruován útvar středově souměrný podle počátku soustavy souřadnic (viz Moravcová & Kaňková, 2018), i zde objevili pravidlo pro změnu znamének obou koeficientů.

Pokud by jedné třídě byly zadány zároveň úlohy 3.1 i 3.2, nabízí se následná diskuse s žáky o komutativnosti – proč například zápisy „$-x + y$“ a „$+y - x$“ vyjadřují totéž, ale „(–1, 1)“ a „(1, –1)“ již nikoliv? S tímto problémem jsme se setkali zatím pouze při hře formulky, kdy žáci bez znalosti vektorů hledali vhodný způsob, jak trasu symbolicky popsat.

Besedy s žáky rovněž odhalily některé příčiny vzniku chyb, kterých si jsou žáci sami vědomi. Opakovaně například připustili, že se jim plete pořadí souřadnic i znaménka (pohyb vpravo x vlevo). Někteří žáci kvint přiznali, že nemají dostatečnou trpělivost („když mi to nešlo, tak mě to přestalo bavit“). Setkali jsme se však převážně s pozitivními reakcemi. Žáci oceňovali zajímavé úlohy, možnost objevit samostatně řešení, hezky vycházející obrázky i příležitosti k objevení zajímavých souvislostí.

Závěr

Předložené úlohy a jim podobné lze s úspěchem zadávat ve všech ročnících druhého stupně základní školy a střední školy poté, co jsou žáci obeznámeni se zápornými čísly a kartézskou soustavou souřadnic. Úlohy lze zařadit do mnoha tematických celků, zejména se hodí pro procvičení úloh z různých oblastí planimetrie. Jejich průběžné zadávání nezabírá čas v hodinách pro výklad dalších témat, neboť mohou posloužit jako přirozené opakování předchozího učiva i jako průprava učiva nového.

Žáci, kteří se s podobnými úlohami setkávali dlouhodobě a systematicky, prokázali lepší geometrickou představivost při řešení početních úloh z oblasti analytické geometrie. Naopak pro žáky, kteří se s úlohami setkali poprvé, bylo jejich řešení bez pomoci učitele obtížné a navrhovali zbytečně složité postupy. Je pozoruhodné, že čím starší žáci úlohy řešili, tím obtížnější metody zkoušeli a více numericky chybovali. Průběžné zařazování úloh z oblasti planimetrie, avšak pomocí kartézské soustavy souřadnic, může přispět ke snížení pouze formálního pochopení učiva analytické geometrie a k získání hlubší vizuální představy při práci s rovnicemi v této oblasti matematiky. Úlohy, v nichž se pracuje s pohybem ve čtvercové mřížce a s číselným zápisem tohoto pohybu, považujeme za vhodnou propedeutiku pojmu volný vektor a jeho souřadnice. Žáci, kteří předložené úlohy opakovaně před započetím výuky tématu analytická geometrie řešili, méně později chybovali v rutinních výpočtech a automaticky svá řešení doprovázeli vhodnými náčrtky.

Domníváme se, že by úlohy obdobné zde předloženým měly být více průběžně zařazovány a neměly by se objevovat ve výuce pouze nárazově při zavedení kartézské soustavy souřadnic, znázorňování grafů funkcí a v analytické geometrii, jak je tomu převážně nyní. Věříme, že tento příspěvek poslouží učitelům matematiky jako inspirace k vytvoření vlastních úloh, jejichž obtížnost lze libovolně gradovat s ohledem na znalosti a schopnosti žáků.

Poděkování
Děkujeme kolegovi z Gymnázia Třeboň, Mgr. Karlu Pazourkovi, Ph.D., za vytvoření úlohy 1.4 a poskytnutí informací o žákovských řešeních této úlohy. Dále děkujeme Gymnáziu Na Pražačce v Praze a Gymnáziu Třeboň za umožnění provedení tohoto výzkumu.

Příspěvek vznikl v rámci projektu Zvýšení kvality vzdělávání žáků, rozvoje klíčových kompetencí, oblastí vzdělávání a gramotností, reg. č. CZ.02.3.68/0.0/0.0/16_011/0000664 (2017-2019), financováno z Evropských sociálních fondů, řešiteli projektu jsou Univerzita Karlova, Masarykova univerzita, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích a Technická univerzita v Liberci.

Literatura

Coufalová, J., Pěchoučková, Š., Lávička, M., & Potůček, J. (2007a). *Matematika pro 6. ročník základní školy*. Praha: Fortuna.

Coufalová, J., Pěchoučková, Š., Hejl, J., & Lávička, M. (2007b). *Matematika pro 7. ročník základní školy*. Praha: Fortuna.

Hejný, M., & Šalom, P. (2017). *Matematika E, učebnice pro 2. stupeň ZŠ a víceletá gymnázia.* Praha: H-mat.

Herman, J., Chrápavá, V., Jančovičová, E., & Šimša, J. (1998). *Matematika. Kladná a záporná čísla.* Praha: Prometheus.

Hershkowitz, R. (1989). Visualization in geometry – Two sides of the coin. *Focus on learning problems in mathematics*, 11(1), 61–76.

Jirotková, D. (2010). *Cesty ke zkvalitňování výuky geometrie.* Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická Fakulta.

Moravcová, V., & Kaňková, Š. (2018). Propojení práce v soustavě souřadnic s dalšími oblastmi matematiky. In Sborník příspěvků z konference Dva dny s didaktikou matematiky 2018, v tisku.

MŠMT. (2017). *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*. Praha: MŠMT.

RNDr. Vlasta Moravcová, Ph.D.
Matematicko-fyzikální fakulta, Katedra didaktiky matematiky
Univerzita Karlova
morava@karlin.mff.cuni.cz

Mgr. Štěpánka Kaňková
Gymnázium Na Pražačce
kankova@gym-prazacka.cz

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY