

Problémová místa výuky geometrie

Problems in Teaching Geometry

*Jarmila Robová, Petra Surynková, Vlasta Moravcová,
Jana Hromadová, Zdeněk Halas*

Abstrakt: Příspěvek představuje dosavadní výsledky didaktického výzkumu na MFF UK, a to jednak v oblasti konceptuálních znalostí žáků a studentů v geometrii, jednak v oblasti prostorové představivosti budoucích učitelů matematiky. Z hlediska konceptuálních znalostí byly zkoumány zejména geometrické miskoncepce 1 458 respondentů na úrovni nižšího a vyššího sekundárního i terciárního vzdělávání. Výsledky upozornily na časté miskoncepce žáků a jejich přetrvávání na dalších stupních vzdělávání. V rámci výzkumu prostorové představivosti byla testována její úroveň u studentů učitelských oborů na MFF UK. Výsledky potvrdily rozdíly v úspěšnosti žen a mužů, ukázaly preferenci prostorové orientace při řešení úloh či nekonzistentní úspěšnost v rovinných úlohách v jednotlivých testech. Některé dílčí výsledky obou výzkumů byly již publikovány v časopisech a sbornících, viz seznam literatury.

Klíčová slova: geometrické pojmy, prostorová představivost, nižší a vyšší sekundární vzdělávání, terciární vzdělávání, budoucí učitelé matematiky

Abstract: The contribution addresses the results of didactic research conducted at the Faculty of Mathematics and Physics, Charles University (MFF UK), in the field of conceptual knowledge of pupils and students in geometry, and in spatial ability of pre-service mathematics secondary school teachers. In terms of conceptual knowledge, the geometric misconceptions of 1,458 respondents at lower and upper secondary education, and tertiary education were examined. The results showed the most frequent students' misconceptions and their persistence at further levels of education. As part of the research on spatial ability, the spatial ability of pre-service mathematics secondary school teachers at the MFF UK, was tested. The results confirmed the differences in the success rate of women and men, showed a preference for spatial orientation in solving strategies or inconsistent success rate in planar tasks in individual tests. Some partial results of both studies have already been published in journals and proceedings, see the list of references.

Keywords: geometrical concepts, spatial ability, lower and upper secondary education, tertiary education, preservice mathematics teachers

Úvod

Výuka geometrie je důležitou součástí školské matematiky, neboť již od prvního stupně základní školy zpřístupňuje žákům prostor, ve kterém žijí, a to s přijatelnou mírou abstrakce (Čižmár, 2007). Žáci si na základě geometrických vlastností reálného světa postupně vytváří jeho eukleidovský model, přičemž tvorba modelů reálných situací je nepochybně důležitou součástí poznávacího procesu (Robová, 2018). Současně syntetická geometrie představuje tradiční prostředek pro rozvoj syntetické složky myšlení a argumentačních dovedností žáků (Jirotková, 2010). Podstatnou složkou geometrického vzdělávání je rovněž rozvíjení prostorové představivosti, kterou potřebuje každý z nás. Geometrie je tedy významnou součástí výuky matematiky. Zároveň však patří k náročným oblastem matematiky, a to z pohledu žáka a často i učitele (Rendl & Vondrová et al., 2013). Také během naší pedagogické praxe se dlouhodobě setkáváme s tím, že žáci i studenti různých stupňů vzdělávání mají problémy s řešením geometrických úloh; jedná se například o konstrukční úlohy v rovině či řezy jehlanů zobrazených v nadhledu zleva nebo podhledu. Tyto problémy obvykle souvisejí s konceptuálními znalostmi geometrických pojmů a s nedostatečně

rozvinutou prostorovou představivostí. V rámci naší výzkumné skupiny jsme se proto rozhodli hlouběji prozkoumat dvě oblasti, které zřejmě souvisejí s problémy žáků a studentů v geometrii: porozumění geometrickým pojmům a rozvíjení prostorové představivosti.

Teoretická východiska

Žákovské koncepty geometrických pojmů

Představy o pojmech, s kterými se žáci setkávají ve svém životě, se u žáků vytvářejí dříve, než je školní výuka zpřesní; tyto představy jsou označovány jako *prekoncepty* (Škoda & Doulík, 2011). Prekoncepty jsou důležitou součástí procesu učení, avšak mohou pro žáky představovat překážku, neboť dochází ke střetu mezi žákovými prekoncepty a tím, co se učí ve škole (Kalhous & Obst et al., 2009). Výsledkem tohoto procesu jsou *žákovské koncepty* učiva (resp. žákovo pojetí učiva), které někdy mohou být nesprávné, tzv. *miskoncepce* (Škoda & Doulík, 2011).

Miskoncepce v matematice často souvisejí s žákovými formálními znalostmi, které jsou uchovávány pouze pamětí a žák k nim nemá vytvořené adekvátní modely (Hejný & Kuřina, 2009). V geometrii je tento formalismus dobře pozoro-

rovatelný v případě identifikace útvarů, kdy žáci obvykle správně rozpoznají jen *typický model daného útvaru*, který bývá označován jako *prototyp* (Hershkowitz, 1989), z pohledu Hejného a Kuřiny (2009) jde o případ izolovaného modelu pojmu. Například běžným prototypem trojúhelníku u předškolních dětí i žáků na začátku prvního stupně je rovnostranný trojúhelník s jednou vodorovnou stranou (Tirosh et al., 2011; Budínová, 2018). Prototypy ovlivňují identifikační schopnost jednotlivce, neboť ten používá prototypický příklad jako model při posuzování jiných situací (Hasegawa, 1997, cit. podle Monaghan, 2000, s. 187), což může vést ke zbytečně složitému či dokonce nesprávnému řešení úlohy.

Gray a Tall (1994) zavedli ve výuce algebry termín *procept*, ve kterém jsou dva kognitivní principy – *proces* a *koncept*, související s procedurálními a konceptuálními znalostmi, propojeny; na oblast geometrie rozšířil pojem *proceptu* Hejný (1999). Procedurální znalost je spojena s prováděním posloupností aktivit potřebných pro řešení problému, konceptuální znalost je vázána na porozumění základním principům a souvislostem v konkrétní matematické oblasti (Hiebert & Lefevre, 1986). Podle mnoha výzkumníků tyto dva typy znalostí interagují a nelze je od sebe zcela oddělit (např. Rittle-Johnson & Schneider, 2015).

Zkoumání žákovských konceptů týkajících se základních geometrických pojmů se v posledních letech věnuje několik výzkumníků u nás i v zahraničí; tato šet-

ření se převážně zaměřují na žáky prvního stupně základní školy či na budoucí učitele matematiky. V českém prostředí se konceptuálnímu porozumění žáků v geometrii věnují například Budínová (2018, 2021), Jirotková (2010) nebo Jirotková, Vighi a Zemanová (2019), na Slovensku Gunčaga, Tkačik a Žilková (2017). Tyto výzkumy, kromě jiného, upozornily, že nesprávné představy se vyskytují jak u žáků, tak u budoucích učitelů. Řada zahraničních výzkumů se zaměřila z hlediska porozumění pojmům na správnou identifikaci geometrických útvarů nezávisle na jejich poloze a velikosti. Tyto studie ukázaly, že žáci používají prototyp při identifikaci geometrických objektů a mají tendenci dělat chyby, pokud jsou dané objekty v jiné než prototypové formě (např. Cutugno & Spagnolo, 2002; Jagoda, 2008; Tirosh et al., 2011, Hsiu-Lan Ma et al., 2015).

Rozvíjení prostorové představivosti

Při studiu rovinné i prostorové geometrie hraje velmi důležitou roli prostorová představivost. Ve všech stupních vzdělávání by tedy měla být dostatečně rozvíjena a procvičována. Prostorová představivost představuje mentální manipulaci s dvou- a tří-rozměrnými objekty. V anglicky psané literatuře se běžně užívá pojem *spatial ability*. Lean a Clements (1981) definují prostorovou představivost jako schopnost vytvářet mentální obraz a s tímto obrazem manipulovat v naší

mysli. Běžně se uvádí, že prostorová představivost je jednou z významných složek naší inteligence.

V českém a slovenském prostředí se studiu prostorové představivosti dále věnují např. Molnár (2009), Čmelková, Ďurica a Ilavská (2017). Mnoho mezinárodních studií dokazuje, že soustavný trénink má silný vliv na zlepšování prostorové představivosti (např. Nagy-Kondor, 2017; Sorby & Baartmans, 2000; Yilmaz, 2009). Rovněž se ukazuje, že žáci a studenti s dobře rozvinutou prostorovou představivostí mají vysoké predispozice k zvládnutí studia matematiky a příbuzných technických oborů (Alias, Black & Gray, 2002).

Lidská prostorová představivost je dlouhá léta podrobována vědeckému zkoumání. Tento výzkum vyústil ve složitou hierarchii popisující její jednotlivé složky (Yilmaz, 2009). Dvě hlavní komponenty prostorové představivosti, které popsal McGee (1979), jsou *prostorová vizualizace* a *prostorová orientace*. Toto dělení vzniklo na základě typu mentálního procesu, který je použit k řešení daného geometrického problému. Prostorovou vizualizací nazýváme schopnost řešit geometrický problém pomocí představy, že s objektem hýbeme v naší mysli. Při prostorové orientaci objekt v naší mysli zůstává fixovaný a my si představujeme, že se kolem něj pohybujeme. Jinými slovy, v naší mysli si formujeme pohled na objekt z jiné pozice.

Metodologie

Cíle výzkumu

Hlavním cílem našeho výzkumu v oblasti *konceptuálních znalostí* žáků v geometrii je vysledovat vývoj žákových představ o vybraných geometrických pojmech s důrazem na to, s jakými představami o zkoumaných pojmech žáci vstupují na druhý a na další stupeň vzdělávání.

V oblasti *prostorové představivosti* je naším cílem tuto představivost testovat u studentů učitelských oborů na MFF UK a na základě výsledků poskytovat studentům adekvátní trénink. Považujeme za velmi důležité, aby si budoucí učitelé byli vědomi významu prostorové představivosti a kladli důraz na její rozvíjení u svých žáků pomocí vhodných podnětů a úloh.

Výzkumný soubor

V oblasti zkoumání *konceptuálních znalostí žáků* ve školské geometrii byl výzkumný vzorek získán na základě dostupnosti a zahrnoval celkem 1 458 žáků a studentů; soubor zahrnoval žáky 9 základních škol, 8 gymnázií a studenty 5 vysokých škol v České republice (Tabulka 1). Každému z účastníků byl v letech 2017–2018 zadán jeden ze tří testů (viz dále Test I, II a III) zaměřených na pojmy rovinné geometrie. Výzkumný vzorek byl zvolen tak, aby bylo možné sledovat změny představ žáků od začátku nižšího sekundárního vzdělávání (Test I), přes jeho zakončení (Test II), až po ukončení

Tabulka 1. Skupiny žáků a studentů ve výzkumu konceptuálních znalostí v geometrii

Test	Typ školy a ročník (počet respondentů)	Muži	Ženy	Průměrný věk	Celkem
Test I	Základní škola - 6. ročník (177) Odpovídající ročník nižšího gymnázia (328)	225	280	11	505
Test II	Základní škola - 9. ročník (180) Odpovídající ročník nižšího gymnázia (257)	231	206	15	437
Test III	Poslední ročník gymnázia (311) 1. ročník univerzity (161) Budoucí učitelé - 1. a 2. ročník NMgr. studia (44)	291	225	19 22-23	516

vyššího sekundárního vzdělávání, resp. zahájení terciárního vzdělávání (Test III); Test III byl rovněž zadán budoucím učitelům matematiky v posledních dvou ročnících jejich studia.

Výzkum *prostorové představivosti* je realizován v rámci longitudinální studie na MFF UK, a to se studenty učitelství matematiky. Zahrnuje několik fází - studenty testujeme při jejich příchodu na fakultu, během studia a před jeho dokončením. Zatím byly vyhodnoceny dvě dílčí studie - se studenty druhého ročníku bakalářského studia v akademickém roce 2019/2020 (21 studentů) a se studenty prvního ročníku bakalářského studia na začátku akademického roku 2020/2021 (36 studentů). V první studii účastníci řešili test s geometrickými úlohami na prostorovou orientaci a vizualizaci a rovněž komentovali strategie svých řešení v následném dotazníku, ve druhé studii studenti řešili jiný test s geometrickými úlohami na prostorovou orientaci a vizu-

alizaci a zároveň komentovali obtížnost úloh.

Metody, výzkumné nástroje

Pro zkoumání *konceptuálních znalostí* respondentů, týkajících se vybraných geometrických pojmů byla zvolena metoda anonymního písemného testu (respondenti uváděli jen pohlaví a typ školy) doplněna polostrukturovanými rozhovory se skupinami žáků či studentů nebo s jednotlivci. Při přípravě zadání testů jsme vycházeli z kurikulárních dokumentů RVP ZV (MŠMT, 2017) a RVP G (MŠMT, 2007). Získaná data byla následně kvalitativně (kódování odpovědí respondentů s ohledem na jejich správnost a typ chyby) i kvantitativně (bodové ohodnocení testu, relativní četnosti jednotlivých kódů) zpracována. K posouzení souvislosti mezi odpověďmi na některé úlohy byl použit χ^2 test nezávislosti, resp. Fisherův test.

Tabulka 2. Přehled počtů a typů úloh v jednotlivých testech ve výzkumu konceptuálních znalostí

Testové úlohy	konstrukční	otevřené	uzavřené	celkem
Test I	4	8	11	23
Test II	6	3	11	20
Test III	7	12	8	27

Geometrické úlohy v obou testech *zaměřených na prostorovou představivost* byly nově navrženy a zadány budoucím učitelům matematiky prvního a druhého ročníku bakalářského studia na MFF UK. Test pro druhý ročník zkoumal všeobecně prostorovou vizualizaci a orientaci, nebyl zaměřen na konkrétní školské geometrické téma a byl anonymní. Test pro první ročník vycházel ze středoškolské planimetrie a stereometrie a byl sestaven v souladu s kurikulárním dokumentem RVP G (MŠMT, 2007). Tento test nebyl anonymní, protože chceme studenty sledovat během celého studia a srovnávat jejich výsledky. Získaná data byla opět kvalitativně i kvantitativně vyhodnocena. Použity byly χ^2 test nezávislosti, resp. Fisherův či Mann-Whitneyův test.

Průběh a realizace výzkumu

V úvodní fázi výzkumu žákovských *konceptů geometrických pojmů* byly připraveny tři testy. Srozumitelnost zadání úloh i čas na jejich vypracování byly ověřeny formou pretestů a prostřednictvím polostrukturovaných rozhovorů se

žáky. Na jejich základě byla upravena zadání jednotlivých testů a následně byly testy zadány členy výzkumného týmu ve školách. Rozsah a délka jednotlivých testů byly zvoleny vzestupně dle věku respondentů (Test I: 15 minut, Test II: 20 minut; Test III: 25 minut). Počty úloh v jednotlivých testech včetně jejich typů jsou uvedeny v Tabulce 2. Test II obsahoval méně úloh než Test I, ale některé byly časově náročnější. Konkrétní podobu některých testových úloh lze dohledat v již publikovaných článcích (Halas et al., 2019; Halas et al., 2020; Hromadová et al., 2020; Moravcová et al., 2021; Robová et al., 2019) věnovaným podrobně dílčím úlohám.

S ohledem na hlavní cíl výzkumu bylo primárně testováno porozumění planimetrickým pojmům, které bylo možné zařadit již do Testu I z hlediska rámcového kurikula matematiky na prvním stupni základní školy (MŠMT, 2017); za účelem sledování vývoje žákovských konceptů se tyto pojmy vyskytly také v Testech II a III ve stejných nebo obdobných úlohách: *přímka, polopřímka, trojúhelník, osová souměrnost, kružnice*. Některé

pojmy (např. *středová souměrnost, kruh*) bylo možné zařadit až od Testu II a další (*otočení, stejnolehlost*) pouze do Testu III. Z důvodů porovnání odpovědí žáků a studentů byly v testech zařazeny ještě další pojmy, například *lichoběžník* v Testu II.

Pro vyhodnocení testů jsme odpovídám žáků/studentů přiřadili kódy a následně určili jejich absolutní i relativní četnosti. Testy jednotlivých tříd kódovali vždy nezávisle na sobě dva členové výzkumného týmu. Při analýze konkrétního typu žákovské chyby jsme také v některých případech využili dodatečné testy doprovozené polostrukturovanými rozhovory s žáky v jiné skupině stejného věku. V této fázi výzkumu jsme zpravidla použili původní testovou úlohu, kterou jsme dle potřeby přizpůsobili či doplnili další úlohou.

Testování *prostorové představivosti* bylo zatím vyhodnocováno ze dvou testů. Test pro druhý ročník bakalářského studia byl nejdříve ověřen formou pretestu a na základě toho upraven. Test obsahoval celkem 8 úloh na prostorovou orientaci a vizualizaci a byl řešen v časovém limitu 30 minut. Úlohy byly zaměřeny na orientaci v mapě a na procházky po krychli. Účastníkům testování byly přiřazeny kódy, aby mohl být test spárován s následným dotazníkem. Testy a dotazníky byly vyhodnoceny nezávisle dvěma výzkumníky.

Test *prostorové představivosti* pro první ročník bakalářského studia probíhal jako jediný online formou, protože byl zadán v době celorepublikového

lockdownu v důsledku epidemiologické situace. Test obsahoval 22 úloh na prostorovou orientaci a vizualizaci a byl řešen v časovém limitu 40 minut (3 studenti se speciálními potřebami řešili test v čase 60 minut). Z testových úloh bylo 12 zaměřeno na prostorovou a 10 na rovinnou geometrii. Studenti zároveň komentovali obtížnost úloh.

Výsledky

Některé úlohy z testů zaměřených na žákovské *koncepty geometrických pojmů* jsou stále ve fázi zpracování a vyhodnocování, mnohé dílčí výsledky však již byly publikovány. Podívejme se na některé časté miskoncepce žáků a studentů v jednotlivých testech.

V Testu I určeném pro 6. ročník základních škol a odpovídající ročník víceletých gymnázií byla nejvýraznější žákovskou miskonceptí představa žáků o trojúhelníku jako o uzavřené lomené čáře, nikoliv jako dvoudimenzionálním útvaru. V úloze, ve které měli žáci na obrázku zakroužkovat z vyznačených bodů (vnitřních, vnějších i bodů ležících na stranách trojúhelníku) ty, které náleží danému trojúhelníku, odpovědělo zcela správně pouze 21,58 % žáků. Podrobné výsledky byly publikovány v (Robová et al., 2019). K překvapivým výsledkům v rámci Testu I patří, že přibližně třetina respondentů považuje střed kružnice za její bod, neboť 36,24 % žáků u obrázku kružnice a přímky procházející jejím středem zvolilo odpověď, že přímka

s kružnicí má 3 společné body; podrobněji viz (Hromadová et al, 2020). Dále pak mají žáci potíže s identifikací kosodélníku jako osově nesouměrného útvaru. Tento problém v Testu I vyřešilo správně jen 29,70 % žáků, detailněji viz (Moravcová et al., 2021).

Výsledky Testu II, který byl zadán žákům 9. ročníku základních škol a odpovídajícím ročníkům víceletých gymnázií, ukázaly, že některé z výše uvedených miskoncepce identifikovaných v prvním testu s dalšími roky školní docházky nemizí. V úloze, ve které žáci kroužkovali body náležící trojúhelníku, odpovědělo správně 21,74 % respondentů, tedy relativní četnost správné odpovědi byla v Testech I i II téměř stejná. Rovněž přetrvávala představa, že střed kružnice je jejím bodem, avšak relativní četnost odpovědi, že kružnice a přímka procházející jejím středem mají 3 body společné, byla oproti Testu I o něco nižší - 28,60 % (Hromadová et al., 2020). Pozitivním jevem bylo, že se zvýšila relativní četnost identifikace kosodélníku jako osově nesouměrného útvaru, a to na 41,42 % (Moravcová et al., 2021). V rámci druhého testu jsme se rovněž setkali s preferencí prototypů a prototypických poloh objektů - přibližně třetina žáků měla problém rozeznat lichoběžník v neprototypické poloze, viz (Halas et al., 2019).

Zpracování výsledků Testu III pro poslední ročník gymnázií, první ročník vysokých škol a pro budoucí učitele matematiky ukázalo zlepšení konceptuálních znalostí respondentů týkajících

se trojúhelníku, kružnice a kosodélníku oproti Testům I a II. Relativní četnost správné odpovědi při určení bodů náležejících zadanému trojúhelníku se oproti předchozím dvěma testům téměř zdvojnásobila na 43,22%. Miskoncepce, že střed kružnice je jejím bodem, se vyskytla již jen u 13,37 % respondentů, což představuje výrazný pokles oproti Testům I i II. Kosodélník jako osově nesouměrný útvar identifikovalo v Testu III více respondentů, a to 55,04 %, tedy o něco více než polovina výzkumného vzorku. Test III obsahoval také dvě úlohy na určení obrazu útvaru ve shodném zobrazení - v jedné úloze měli respondenti určit obraz přímky v zadaném otočení, v druhé úloze obraz nepravidelného mnohoúhelníku ve středové souměrnosti. V případě otočení byla přibližně jen polovina respondentů schopna správně identifikovat obraz přímky v daném otočení (Halas et al., 2020). K dalším zjištěným jevům patřila ve druhé úloze častá záměna středové souměrnosti za osovou souměrnost se svislou osou souměrnosti (Moravcová et al., 2021).

V testech jsme také odhalili problémy žáků a studentů s chápáním některých dalších geometrických pojmů. Například více než polovina testovaných patrně zaměnila pojmy *osa úsečky* a *osa souměrnosti úsečky*, když uvedli, že úsečka má (právě) jednu osu souměrnosti. Relativní četnost respondentů s tímto názorem se s rostoucím věkem dokonce zvyšovala (Moravcová et al., 2021).

V testech konceptuálních znalostí jsme sledovali mimo jiné závislost odpovědí respondentů na typu školy. Dle dosavadních zjištění si s úlohami Testu I a II lépe poradili žáci nižších gymnázií v porovnání s žáky základních škol, neboť měli většinou dvojnásobnou relativní četnost správné odpovědi v již zmiňovaných úlohách. Ze všech tří skupin respondentů si v našem výzkumu zpravidla nejlépe vedli studenti posledních dvou ročníků studia učitelství.

Testování *prostorové představitosti* ve druhém ročníku bakalářského učitelského studia odhalilo, že ženy byly úspěšnější v řešení rovinných úloh, zatímco muži v úlohách na prostorovou geometrii. V úlohách na navigaci v mapě ženy inklinovaly k otáčení mapy při řešení dané úlohy. Toto zjištění korespondovalo také s odpovědmi v dotaznících, kde uváděly, že používají navigaci více než muži. Podle dotazníku se ukázalo, že více studentů užívá prostorovou orientaci při řešení úloh o krychli. Rovněž se ukázalo, že studenti se výrazně zlepšují při řešení úloh, pokud mohou používat prostorový model krychle. Celkově byli studenti úspěšnější v rovinných úlohách. I když získaná data ukazovala na závislost mezi strategií řešení a úspěšností v řešení úlohy, významný vztah nebyl analýzou dat potvrzen, viz (Surynková & Moravcová, 2020).

Testování *prostorové představitosti* v prvním ročníku bakalářského učitelského studia ukázalo, že studenti byli úspěšnější naopak v prostorových úlo-

hách. Na jejich úspěšnost v testu však nemělo vliv, zda řeší úlohu na prostorovou orientaci či vizualizaci, více viz (Surynková et al., 2021).

Diskuse

Některé námi potvrzené žákovské miskoncepce v oblasti *geometrických pojmů* prokázaly také další výzkumy. Na problém vnímání trojúhelníku jen jako lomené čáry upozornila například Budínová (2018), na výskyt žákovské představy o středu kružnice jako jejího bodu poukázal Bekdemir (2012), problém s identifikací kosodélníku jako osově neseušeného útvaru u studentů pozoroval rovněž Son (2006). Obdobně jako v našem výzkumu i jiné studie (např. Tirosh et al., 2011; Budínová, 2018) potvrdily, že žáci se při identifikaci geometrických objektů (např. lichoběžníku, osy souměrnosti útvaru), často opírají o jejich prototypy. Na skutečnost, že žáci mají problémy s konstrukcí obrazů útvarů v geometrických zobrazeních, např. v otočení, upozornili také Ada a Kurtulus (2010). Námi identifikované neporozumění rozdílu mezi osou úsečky a osou souměrnosti úsečky však nebylo dosud jinými studii zkoumáno. Na potencionální vliv učebnic na porozumění žáků geometrickým pojmům upozorňují například Budínová (2018) a Moravcová et al. (2021).

Výsledky testování *prostorové představitosti studentů* ve druhém ročníku bakalářského studia odhalily, že studenti

používají při řešení geometrických úloh obě složky prostorové představivosti – vizualizaci i orientaci, přičemž preferovali užití prostorové orientace. Použití prostorového modelu a zlepšení při řešení geometrických úloh potvrzují také mezinárodní studie, např. (Katsioloudis, Jovanovic, & Jones, 2014). Větší úspěšnost v rovinných úlohách byla předpokládána (např. Jolicœur et al., 1985). Test pro druhý ročník bakalářského studia obsahoval dva typy úloh – na navigaci po mapách a na cestu po krychli, viz (Surynková & Moravcová, 2020). Ve všech úlohách se ukázalo, že muži jsou výrazně úspěšnější, což je v souladu i s jinými studiemi (např. Lewine et al., 1999; Peters et al., 1995).

Výsledky testování studentů prvního ročníku bakalářského studia ukázaly, že úlohy na prostorovou orientaci a vizualizaci byly řešeny se stejnou úspěšností. To dokládají i Al-Balushi a Coll (2013), ovšem podle jiných výzkumů se ukazuje, že mnohem častěji bývají studenti úspěšnější v úlohách na prostorovou orientaci (McGee, 1979). Při hodnocení jednotlivých úloh na rovinnou geometrii se ukázalo, že neúspěšnost studentů vycházela především z neznalosti užití terminologie (zejména kladně a záporně orientovaný úhel).

Závěr

Náš výzkum prokázal, že k problémovým místům výuky geometrie patří nedostatečné *konceptuální znalosti* výše uvede-

ných pojmů na úrovni nižšího i vyššího sekundárního vzdělávání. U některých respondentů se objevily miskoncepce i na začátku terciárního vzdělávání. K obdobným výsledkům dospěly další výzkumy, včetně zahraničních. Při kvalitativní analýze dat jsme rovněž v několika posttestech pozorovali souvislost mezi konceptuálním porozuměním respondentů a jejich procedurálními znalostmi. Ve zkoumání této souvislosti, včetně dalších miskoncepčí v oblasti analytické geometrie, chceme v následujících letech pokračovat. Zjištěné výsledky využíváme v přípravě budoucích učitelů matematiky a také v rámci vzdělávacích akcí pro učitele z praxe.

Podle výsledků testování *prostorové představivosti* plánujeme upravovat obsah používaných testů, abychom lépe reflektovali mezinárodní výzkumy. Na základě úspěšnosti studentů rovněž navrhujeme úpravu geometrických předmětů, které na fakultě vyučujeme, abychom podporovali procvičování a tedy i rozvíjení prostorové představivosti.

Výše uvedené výsledky představují jen část našeho výzkumu; další podrobnosti lze nalézt v citované literatuře.

Seznam bibliografických odkazů

- Ada, T., & Kurtulus, A. (2010). Students' misconceptions and errors in transformation geometry. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(7), 901–909. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2010.486451>
- Al-Balushi, S. M., & Coll, R. K. (2013). Exploring verbal, visual and schematic learners' static and dynamic mental images of scientific species and processes in relation to their spatial ability. *International Journal of Science Education*, 35(3), 460–489. <http://dx.doi.org/10.1080/09500693.2012.760210>
- Alias, M., Black, T. R., & Gray, D. E. (2002). Effect of instructions on spatial visualisation ability in civil engineering students. *International Education Journal*, 3(1), 1–12.
- Bekdemir, M. (2012). Evaluation of elementary preservice teachers' conceptual and procedural knowledge on circle and disc. *Hacettepe University Journal of Education*, 43, 83–95.
- Budínová, I. (2018). Vytváření představ základních geometrických pojmů u žáků prvního stupně základní školy: trojúhelník a kruh. *Učitel matematiky*, 26(1), 1–11.
- Budínová, I. (2021). Vývoj představ žáků o geometrických pojmech v průběhu základní školy. *Učitel matematiky*, 29(1), 1–25.
- Cutugno, P., & Spagnolo, F. (2002). Misconceptions about triangle in elementary schools. In A. Rogerson (Ed.), *Conference The Mathematics Education into the 21st Century Project*. Italy, Palermo.
- Čižmár, J. (2007). Geometria na prahu 21. storočia z pohľadu jej päťtisíc ročného vývoja. In E. Fuchs (Ed.), *Matematika v proměnách věků IV* (s. 123–161). Brno: Akademické nakladatelství CERM.
- Čmelková, V., Ďurica, M., & Ilavská, I. (2017). Testovanie priestorovej predstavivosti študentov UNIZA prostredníctvom MRT testu. In M. Ďurica (Ed.), *Deskriptívna geometria dnes a zajtra* (s. 10–14). Žilina: Žilinská univerzita.
- Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A “proceptual” view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(2), 116–140. <https://doi.org/10.2307/749505>
- Gunčaga, J., Tkačik, Š., & Žilková, K. (2017). Understanding of selected geometric concepts by pupils of pre-primary and primary level education. *European Journal of Contemporary Education*, 6(3), 497–515. <https://10.13187/ejced.2017.3.497>
- Halas, Z., Moravcová, V., Robová, J., & Hromadová, J. (2020). Are students able to identify an image of a straight line in rotation? In J. Fejfar & M. Flégl (Eds.), *Proceedings of the 17th international conference on efficiency and responsibility in education* (pp. 69–75). Czech University of Life Sciences Prague.

- Halas, Z., Robová, J., Moravcová, V., & Hromadová, J. (2019). Pupils' concepts of the trapezoid at the end of lower secondary level education. *Open Education Studies*, 1(1), 184–197. <https://doi.org/10.1515/edu-2019-0013>
- Hejný, M. (1999). Procept. In *Zborník bratislavského seminára z teórie vyučovania matematiky* (s. 40–61). Bratislava: MFF UK, Katedra základov a didaktiky matematiky.
- Hejný, M., & Kuřina, F. (2009). *Dítě, škola a matematika. Konstruktivistické přístupy k vyučování*. Praha: Portál.
- Hershkowitz, R. (1989). Visualization in geometry – Two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 61–76.
- Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp.1–27). Erlbaum.
- Hromadová, J., Halas, Z., Moravcová, V., & Robová, J. (2020). Does the circle center belong to the circle? In L. Gómez Chova, A. López Martínez & I. Candel Torres (Eds.), *Proceedings of the 13th International Conference of Education, Research and Innovation* (pp.1296–1302). IATED Academy. <https://doi.org/10.21125/iceri.2020>
- Hsiu-Lan Ma, De-Chih Lee, Szu-Hsing Lin, & Der-Bang Wu. (2015). A study of van Hiele of geometric thinking among 1st through 6th graders. *Euroasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 11(5), 1181–1196. <https://doi.org/10.12973/eurasia.2015.1412a>
- Jagoda, E. (2008). Building the concept of line symmetry. In B. Maj, M. Pytlak & E. Swoboda (Eds.), *Supporting independent thinking through mathematical education* (pp.109–120). Rzeszów: Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego.
- Jirotková, D. (2010). *Cesty ke zkvalitňování výuky geometrie*. Praha: PedF UK.
- Jirotková, D., Vighi, P., & Zemanová, R. (2019). Misconceptions about the relationship between perimeter and area. In J. Novotná & H. Moraová (Eds.), *Proceedings of opportunities in learning and teaching elementary mathematics* (pp. 221–231). Prague: Charles University, Faculty of Education.
- Jolicœur, P., Regehr, S., Smith, L. B. J. P., & Smith, G. N. (1985). Mental rotation of representations of two-dimensional and three-dimensional objects. *Canadian Journal of Psychology*, 39(1), 100–129. <https://doi.org/10.1037/h0080118>
- Kalhous, Z., & Obst, O. et al. (2009). *Školní didaktika*. Praha: Portál.
- Katsioloudis, P., Jovanovic, V., & Jones, M. (2014). A comparative analysis of spatial visualization ability and drafting models for industrial and technology education students. *Journal of Technology Education*, 26(1), 88–101. <http://doi.org/10.21061/jte.v26i1.a.6>

- Lean, G., & Clements, M. A. (Ken) (1981). Spatial ability, visual imagery, and mathematical performance. *Educational Studies in Mathematics*, 12(3), 267–299. <https://doi.org/10.1007/BF00311060>
- Lewine, S. C., Huttenlocher, J., Taylor, A., & Langrock, A. (1999). Early sex differences in spatial skill. *Developmental Psychology*, 35(4), 940–949. <https://doi.org/10.1037/0012-1649.35.4.940>
- McGee, M. G. (1979). Human spatial abilities: Psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological influences. *Psychological Bulletin*, 86(5), 889–918.
- Molnár, J. (2009). *Rozvíjení prostorové představivosti (nejen) ve stereometrii*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci.
- Monaghan, F. (2000). What difference does it make? Children's views of the differences between some quadrilaterals. *Educational Studies in Mathematics*, 42(2), 179–196. [10.1023/A:1004175020394](https://doi.org/10.1023/A:1004175020394)
- Moravcová V., Robová J., Hromadová J., & Halas Z. (2021). Students' Understanding of Axial and Central Symmetry. *Journal on Efficiency and Responsibility in Education and Science*, 14(1), 28–40. <http://dx.doi.org/10.7160/eriesj.2021.140103>
- MŠMT. (2017). *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*. NÚV.
- MŠMT. (2007). *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia*. VÚP.
- Nagy-Kondor, R. (2017). Spatial ability: Measurement and development. In Khine, M. (Ed.), *Visual-spatial ability in STEM education*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-44385-0_3
- Peters, M., Laeng, B., Latham, K., Jackson, M., Zaiyouna, R., & Richardson, C. (1995). A redrawn Vandenberg and Kuse mental rotations test – different versions and factors that affect performance. *Brain and Cognition*, 28(1), 39–58.
- Rendl, M., Vondrová, N., Hříbková, L., Jirotková, D., Kloboučková, J., Kvasz, Žalská, J. (2013). *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů*. Praha: PeF UK.
- Rittle-Johnson, B., & Schneider, M. (2015). Developing conceptual and procedural knowledge of mathematics. In R. C. Kadosh, & A. Dowker (Eds.), *The Oxford handbook of numerical cognition* (pp. 1102–1118). Oxford University Press. <http://dx.doi.org/10.1093/oxfordhb/9780199642342.013.014>
- Robová, J. (2018). K čemu je školská geometrie? In J. Hromadová & A. Slavík (Eds.), *Sborník konference Cesty k matematice III 2018* (s. 7–14). Praha: Matfyzpress.
- Robová, J., Moravcová, V., Halas, Z., & Hromadová, J. (2019). Žákovské koncepty trojúhelníku na začátku druhého stupně vzdělávání. *Scientia in educatione*, 10(1), 1–22. <https://doi.org/10.14712/18047106.1211>

- Son, J. W. (2006). Investigating preservice teachers' understanding and strategies on a student's errors of reflective symmetry. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings 30th conference of the International Group for the psychology of mathematics education* (pp. 145–152). Prague: PME.
- Sorby, S. A., & Baartmans, B. J. (2000). The development and assessment of a course for enhancing the 3-D spatial visualization skills of first year engineering students. *Journal of Engineering Education*, 89(3), 301–307. <https://doi.org/10.1002/j.2168-9830.2000.tb00529.x>
- Surynková, P., & Moravcová, V. (2020). Pre-service mathematics teacher education: Testing and improvements of spatial skills. In L. Gómez Chova, A. López Martínez & I. Candel Torres (Eds.), *14th international technology, education and development conference, INTED2020 proceedings* (pp. 6577–6586), IATED. <https://doi.org/10.21125/inted.2020.1751>
- Surynková, P., Moravcová, V., Robová, J., & Hromadová, J. (2021). Testing of pre-service mathematics teachers' spatial abilities. In J. Fejfar, & M. Flégl (Eds.), *Proceedings of the 18th international conference on efficiency and responsibility in education* (pp. 141–147), Prague: Czech University of Life Sciences.
- Škoda, J., & Doulík, P. (2011). *Psychodidaktika*. Praha: Grada Publishing.
- Tirosh, D., Tsamir, P., Tabach, M., Levenson, E., & Barkai, R. (2011). Geometrical knowledge and geometrical self-efficacy among abused and neglected kindergarten children. *Scientia in educatione*, 2(1), 23–36. <https://doi.org/10.14712/18047106.52>
- Yilmaz, H. (2009). On the development and measurement of spatial ability. *International Electronic Journal of Elementary Education*, 1(2), 83–96.

doc. RNDr. Jarmila Robová, CSc.

RNDr. Petra Surynková, Ph.D.

RNDr. Vlasta Moravcová, Ph.D.

RNDr. Jana Hromadová, Ph.D.

Mgr. Zdeněk Halas, DiS., Ph.D.

Matematicko-fyzikální fakulta, Katedra didaktiky matematiky

Univerzita Karlova

jarmila.robova@mff.cuni.cz

petra.surynkova@mff.cuni.cz

vlasta.moravcova@mff.cuni.cz

jana.hromadova@mff.cuni

zdenek.halas@mff.cuni.cz