Jak na to? Různé způsoby řešení slovních úloh

Hana Nováková, Jarmila Novotná[1]

Článek seznamuje čtenáře s obsahem pracovní dílny, která proběhla na konferenci. Základem úspěšného učení se matematice je řešení úloh, které pomáhá rozvoji tvořivosti, jejímu rozšiřování a kultivaci. Cílem dílny bylo ukázat, jakým způsobem můžeme žáky seznámit s různými strategiemi řešení slovních úloh. Ukázat jim, že řešení slovních úloh je tvůrčí práce, během které můžou najít více správných cest ke správnému výsledku. Účastníci dílny hledali pro vybrané úlohy možné řešitelské strategie a zamýšleli se nad výhodami a nebezpečími použití navržených strategií. Návrhy pak porovnali s tím, jak úlohy řešili 14–15letí žáci.

Se slovními úlohami se žáci setkávají průběžně již od první třídy. Na druhém stupni ZŠ jsou součástí tematických celků dělitelnost, zlomky, poměr, procenta, ve vyšších ročnících pak rovnice a jejich soustavy. Podle RVP by také žáci měli řešit „nestandardní aplikační úlohy a problémy“. Pro ilustraci uveďme výstup z tohoto tematického celku pro 9. ročník: „Žák užívá logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení slovních úloh a problémů a nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací“ (Okruh 4: Nestandardní aplikační úlohy a problémy)[2]. Řešení slovních úloh patří mezi nejvýznamnější oblasti školské matematiky, ale zasahuje i do jiných oblastí vzdělávání, např. rozvíjí schopnost porozumět textu, třídit informace, kriticky číst i myslet.

Z hlediska didaktiky matematiky žák při řešení slovních úloh hledá a vytváří matematický model, pomocí kterého bude schopen úlohu vyřešit. Ukazuje se, že někteří žáci (ale i učitelé) raději řeší „klasické“ (typové) úlohy, jejichž matematický model (algoritmus řešení) odhalí na první pohled. Podle (Novotná, 2000) k tomu mohou vést tyto důvody: Žák nerozumí slovní úloze z hlediska jazykového nebo nechápe sociální kontext úlohy do té míry, že odmítne úlohu řešit. V průběhu čtení zadání úlohy se žák pokouší o řešení, ale z různých důvodů (délka textu, registr jazyka, příliš velké množství informací apod.) se mu nedaří vybrat důležité informace. Žák rozumí zadání úlohy, dokáže identifikovat podstatné informace, ale neodhalí matematický model potřebný k vyřešení úlohy.

Na základě naší zkušenosti si dovolujeme tvrdit, že postoj žáků k problematice slovních úloh je spíše negativní. Většinou je považují za obtížné. Mají strach a obavy z neúspěchu. Domníváme se, že tento strach z neúspěchu může vycházet z domněnky, že je nutné každou úlohu vyřešit jedním daným způsobem. Žák se obává, že ho nenajde a mnohdy se o řešení ani nepokusí.

---

[1]Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, hanka.hrabakova@centrum.cz, jarmila.novotna@pedf.cuni.cz

[2]https://clanky.rvp.cz/wp-content/upload/prilohy/17383/matematika_a_jeji_aplikace.pdf

Mezi základní otázky výuky matematiky patří: Má učitel vést žáky k tomu, aby co nejlépe zvládli algoritmy, nebo má rozvíjet jejich tvořivost? Mají příležitost pracovat kreativně dostat pouze žáci s dobrými výsledky v matematice nebo všichni? (Sarrazy & Novotná, 2013). Cílem dílny bylo na několika slovních úlohách ukázat účastníkům možnosti použití různých neškolských řešitelských strategií. Dalším cílem bylo porovnat to, které řešitelské strategie pro úlohy očekávali, s tím, jak na možnost tvořivého přístupu k řešení reagovali žáci.

Trochu teorie na úvod

V rámci projektu GAČR 407/12/1939 byly sledovány tyto řešitelské strategie, souhrnně označovány jako heuristické strategie: Pokus – ověření – korekce, Systematické experimentování, Analogie, Přeformulování úlohy, Použití řešitelského obrázku, Použití grafů funkcí, Vypuštění podmínky, Cesta zpět, Zobecnění a konkretizace (příp. Konkretizace a zobecnění), Zavedení pomocného prvku, Rozklad na jednodušší případy a Užití falešného předpokladu (Eisenmann, Novotná & Přibyl, 2015). Všechny tyto strategie patří mezi tzv. heuristické strategie v pojetí (Pólya, 2004).

Nováková (2013) se zaměřuje na analýzu a priori didaktických situací a na její vztah k přípravám na výuku matematiky v praxi učitelů matematiky. V teorii didaktických situací v matematice je analýza a priori popsána jako „profesní nástroj, který může učitelům při plánování výuky pomoci“ (Nováková, 2013, s. 21). Jednou z hlavních složek analýzy a priori je vyhledání co nejvíce možných strategií řešení úloh (správných i chybných) a vědomostí a poznatků nezbytných pro jednotlivé strategie řešení.

Úlohy použité v dílně a vhodné řešitelské strategie pro ně

V dílně byly použity tři úlohy (Čtvrtkruh, Ryba a Zahrada) zpracované v rámci projektu GAČR407/12/1939, které je možné řešit nejen pomocí některého „školského“ algoritmu, ale několika vhodnými heuristickými strategiemi. Pro každou úlohu uvádíme nejprve kromě zadání také přehled vhodných řešitelských strategií. Neuvádíme seznam možných chybných strategií, které žáci mohou použít, pouze upozorňujeme na některá, podle našich očekávání často se objevující, úskalí.

Nejprve uvádíme strategie A, B, které jsou společné pro všechny tři úlohy:

A. *Pokus – ověření – korekce:* V prvním kroku provedeme náhodnou volbu. Ověříme, zda volba splňuje všechny podmínky ze zadání. Pokud ne, provedeme nový odhad a postup opakujeme. Cílem je se řízenými iteracemi dobrat po konečném počtu kroků k cíli.

B. *Systematické experimentování:* Postupujeme podobně jako v A, pouze hodnotu pro další krok měníme systematicky.

Zahrada

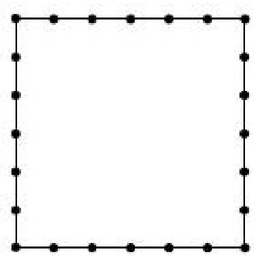
Po obvodu pozemku tvaru čtverce má být postaveno celkem 24 kůlů. Kolik nejvýše kůlů bude na každé straně tohoto pozemku, jestliže na všech jeho stranách má být počet kůlů stejný?

Očekávané správné řešitelské strategie

Lze očekávat, že řešitelé použijí aritmetickou cestu ($24 : 4 = 6$). To však není správné řešení, protože záleží na tom, zda jsou kůly umístěné v rozích nebo ne. Toto nebezpečí se týká i všech dalších strategií, které představujeme. Největší počet kůlů na straně zahrady bude v případě, že čtyři kůly jsou umístěny v rozích zahrady.

Z1. *Aritmetická cesta (školská strategie)*: 4 kůly jsou umístěny v rozích, tedy na každé straně zahrady jsou 2 kůly. Zbylých 20 kůlů rozdělíme rovnoměrně na všechny strany, tedy na jedné straně bude $20 : 4 = 5$ kůlů. Na každé straně může být nejvýše 7 kůlů.

Z2. *Použití řešitelského obrázku*:

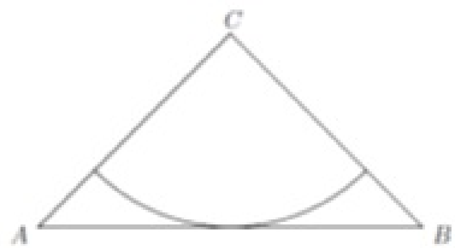


Z3. *Analogie*: Zadáme analogickou úlohu, která je snáze řešitelná, např.: *Po obvodu pozemku tvaru čtverce má být postaveno celkem 8 kůlů. Kolik nejvýše kůlů bude na každé straně tohoto pozemku, jestliže na všech jeho stranách má být počet kůlů stejný?* Při tomto zadání řešitel snadno vidí, že největší počet kůlů na straně zahrady je v případě, že 4 kůly jsou umístěny v rozích. Sleduje-li řešitel řešitelský postup u této zjednodušené úlohy ($8 - 4 = 4, 4 : 4 = 1, 1 + 2 = 3$) a použije ho v zadané úloze, snadno najde správné řešení.

Poznámka: Na základě uvedených úvah lze pracovat i s obecnější úlohou, kdy kůlů je n.

Čtvrtkruh

Do pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku je vepsána část kružnice podle obrázku. Určete obsah vepsané části kruhu, jestliže velikost přepony trojúhelníka je $|AB| = 8\,\text{cm}$.



Očekávané správné řešitelské strategie

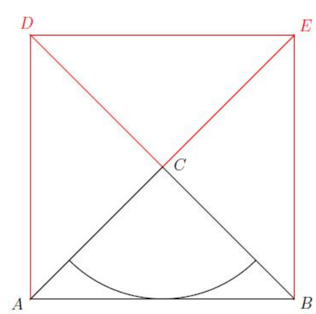
Pro správné vyřešení úlohy je třeba zjistit poloměr vepsané kružnice. Pak už stačí vypočítat obsah kruhu a uvědomit si, že vyznačená část kruhu je její čtvrtina. Uvádíme pouze strategie pro výpočet poloměru kružnice.

C1. *Použití Pythagorovy věty (školská strategie)*: Pomocí Pythagorovy věty spočítáme velikost strany AC. Znovu aplikujeme Pythagorovu větu, tentokrát na trojúhelník ACT_a, kde T_a je střed strany AC.

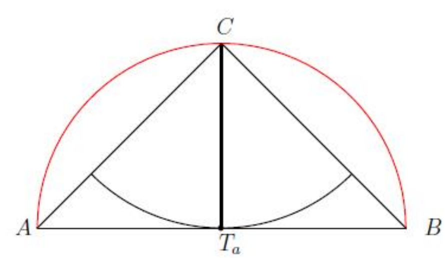
C2. *Použití Euklidovy věty o výšce (školská strategie)*: Označíme-li c_a, c_b velikost úseků, na které rozdělí bod T_a stranu AC, je druhá mocnina poloměru vepsané kružnice rovna $c_a \cdot c_b$.

C3. *Použití pomocného trojúhelníku*: Po nakreslení obrázku si uvědomíme, že trojúhelník T_aCA je také rovnoramenný, tedy velikost úsečky CT_a je rovna polovině délky strany AB.

C4. *Zavedení pomocného prvku*: C4a: Doplnění do čtverce (obr. 1a), C4b: Použití Thaletovy kružnice (obr. 1b)



Obr. 1a

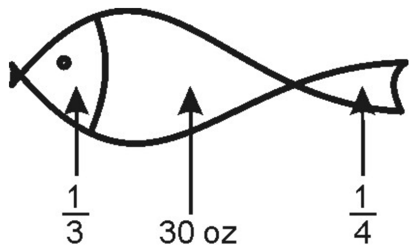


Obr. 1b

Poznámka: Někteří řešitelé mohou použít překládání papíru nebo narýsování obrázku ve skutečné velikosti a změření poloměru.

Ryba

Hlava ryby váží $\frac{1}{3}$ celé ryby, její ocas váží $\frac{1}{4}$ celé ryby a její tělo váží 30 uncí. Kolik váží celá ryba?

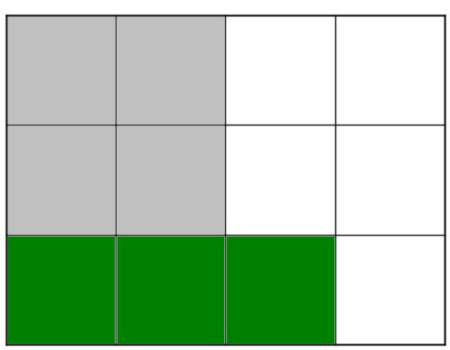


Očekávané správné řešitelské strategie

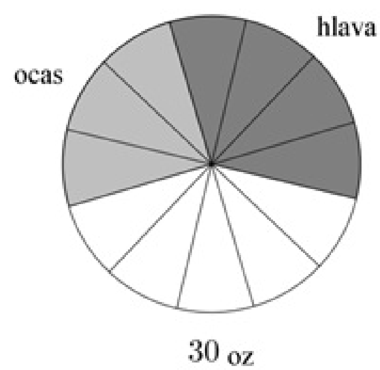
R1. *Algebraická cesta (školská strategie)*: Označme hledanou hmotnost ryby x uncí a sestavme příslušnou rovnici: $\left(\frac{x}{3}\right) + \left(\frac{x}{4}\right) + 30 = x$. Řešením rovnice je $x = 72$.

R2. *Aritmetická cesta (školská strategie)*: Protože hlava a ocas ryby tvoří dohromady $\frac{7}{12}$ ryby, tvoří tělo $\frac{5}{12}$ ryby. Víme, že tělo váží 30 uncí, tedy $\frac{1}{12}$ ryby váží 6 uncí a celá ryba 72 uncí.

R3. *Použití řešitelského obrázku*: Celou hmotnost ryby můžeme reprezentovat např. obdélníkem (obr. 2a) nebo kruhem rozdělenými na 12 stejných částí (obr. 2b). Když vybarvíme třetinu, která odpovídá hmotnosti hlavy a čtvrtinu, která odpovídá hmotnosti ocasu, zbyde 5 dílků, které odpovídají hmotnosti 30 uncí. Celá ryba tedy má hmotnost 72 uncí.



Obr. 2a



Obr. 2b

R3. *Užití falešného předpokladu*: Úloha má multiplikativní charakter, je tedy možné tuto strategii použít. Předpokládejme, že by celá ryba vážila např. 12 uncí. Pak by hlava vážila 4 unce, ocas 3 unce. Tělo by tedy vážilo 5 uncí, což je šestkrát méně, než je zadáno. Proto je hmotnost celé ryby 72 uncí.

Zkušenosti z použití úloh ve třídě

Úlohy byly použity v jedné vyučovací hodině s 24 žáky tercie osmiletého gymnázia. Žáci pracovali celkem v 8 skupinách, dvě skupiny po 2, pět skupin po 4 žácích. Měli k dispozici psací a rýsovací potřeby, kalkulačku a pracovní listy s úlohami. Každá skupina dostala tři listy, na každém byla jedna úloha. Úkolem skupiny bylo všechny úlohy vyřešit, a pokud to půjde, najít více strategií řešení. Zdůraznili jsme, že se na řešení úloh musí podílet všichni členové skupiny tak, aby byl náhodně zvolený zástupce schopen vysvětlit řešení libovolné úlohy. Žáci si měli možnost zkontrolovat výsledky úloh s tabulí, kde byly výsledky napsané zezadu.

Všichni žáci se podíleli na řešení, spolupracovali a vysvětlovali si v rámci skupiny své myšlenky. Během práce ve skupinách se objevily dotazy a připomínky k úloze Zahrada (Je roh strana čtverce? Musí být kůl v rohu? To je jednoduché, bude jich 6.) a k terminologii v úloze Ryba (Ryba nemá ocas, ale ocasní ploutev. Co je to unce?) Po 25 minutách byla práce ve skupinách ukončena a žáci začali prezentovat svá řešení u tabule.

Zahrada

Na první pohled se úloha zdála žákům snadná, všechny skupiny úlohu vyřešily správně, ale ne všichni na první pokus. Šest skupin použilo strategii Z2, z toho čtyři ji kombinovaly se strategií A. Strategii Z1 použily dvě skupiny. Poznámka: Žáci strategii formulovali v zobecněné podobě, 24 kůlů nahrazovali vyjádřením „celkový počet kůlů“. Při hledání dalších způsobů řešení se objevil dotaz, zda musí být kůly nutně v rohu. V diskusi se žáci shodli na tom, že teoreticky nemusí, ale pak už by nebylo splněné zadání úlohy o největším možném počtu kůlů na straně zahrady.

Poznámka: Při prezentování výsledků žáci z legrace navrhovali, že přikoupí výhodně další kůly, a tak sami přišli i na zobecnění úlohy pro c kůlů.

Čtvrtkruh

Žáci použili strategie C1 (5 skupin) a C4a (2 skupiny). Jedna skupina použila strategii, která se v naší analýze a priori neobjevila: Skupina potřebné prvky v zadání změřila a pomocí poměru a znalosti skutečné délky AB změnila tak, aby získala skutečné rozměry. Obsah části kruhu, který skupina vypočítala, se lišil od správného výsledku o $0{,}5\,\mathrm{cm}^2$. Třída diskutovala o tom, zda takové řešení přijmeme. Žákům se nelíbilo, že je nepřesné, ale na druhou stranu oceňovali, že dotyčný žák „ví, co dělá" – perfektně vysvětlil, že používal poměr, zdůvodnil proč.

Ryba

Všechny skupiny použily strategii R2. Po prezentaci vlastního postupu učitelka žáky vyzvala, aby sestavili rovnici. Většině žáků sestavení rovnice nečinilo obtíže. Společně diskutovali o výhodnosti řešení pomocí rovnice i bez ní. Žáci se shodli na tom, že bez rovnice se jim zdá řešení jednodušší.

Strategie řešení navržené účastníky dílny

Účastníci dílny pracovali v malých skupinách, každá skupina hledala řešitelské strategie pro jednu ze tří úloh. Následovalo představení nalezených strategií všem ostatním účastníkům a diskuse o výhodách a nevýhodách jednotlivých strategií. Ukázalo se, že většinu strategií z analýzy a priori účastníci navrhli také. Neobjevila se strategie Z3 u úlohy *Zahrada* a strategie C2 u úlohy *Čtverec*.

Naopak byly navrženy ještě jiné strategie, z nichž některé byly modifikacemi strategií z analýzy a priori (v úloze *Ryba* byl v R3 použit „tyčový model" a použití analogické úlohy s procenty, v úloze *Čtvrtkruh* byl použit jiný pomocný prvek v C4). Některé navržené strategie se v analýze a priori neobjevily (v úloze *Zahrada*: Vypuštění podmínky [Vypustíme podmínku o stejném počtu kůlů na všech stranách, všechny kůly umístíme na jednu stranu, pak je postupně pravidelně přesunujeme na další strany, až bude podmínka ze zadání splněna]; Rozklad na jednodušší případy [umístíme 4 kůly, po jednom na každou stranu; pak přidáváme kůly vždy po jednom na každou stranu tak dlouho, až vyčerpáme všech 24 kůlů]; v úloze *Ryba*: Výpočet pro 12 ryb a pak dopočítání pro jednu rybu). Pro úlohu *Čtverec* byla účastníky navržena analogie žákovského řešení ze školy v této podobě: narýsování obrázku ve skutečné velikosti a změření poloměru kružnice.

Závěrečná poznámka

Vyučování matematice založené na řešení úloh bez předávání hotových poznatků žákům, tzn. řešení tvořivým způsobem, musí být podloženo dobrou znalostí matematiky učitelů, jejich vlastní zkušeností s tvořivým přístupem k řešení úloh, ale také dostatkem informací a materiálů připravených k použití ve výuce. Nelze ovšem očekávat, že by žáci začali používat heuristické strategie spontánně, pokud nemají podporu učitele nebo někoho jiného. Jednou z možností je využívat úlohy, které lze snadněji, pohodlněji vyřešit pomocí jedné nebo více heuristických strategií místo algoritmických školských strategií. V dílně si mohli účastníci sami vyzkoušet možnosti, které nabízí použití heuristických strategií. Současně si uvědomovali, jaké možnosti má učitel pro to, aby změnil přístup žáků k řešení úloh pouze pomocí algoritmu, který jim byl předložen, směrem k vlastnímu tvořivému hledání vhodných, i když někdy „neškolských“ řešitelských strategií.

Poděkování

Dílna byla připravena v rámci řešení projektu OP VVV CZ.02.3.68/0.0/0.0/16_011/0000664 *Zvýšení kvality vzdělávání žáků, rozvoje klíčových kompetencí, oblastí vzdělávání a gramotností*. Použité úlohy i seznam řešitelských strategií byly vytvořeny v rámci projektu GAČR 407/12/1939 *Rozvíjení kultury řešení matematických problémů ve školské praxi*.

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Literatura

[1] Eisenmann, P., Novotná, J. & Přibyl, J. (2015). Tvořivě při řešení úloh v matematice. In N. Vondrová (Ed.), *Dva dny s didaktikou matematiky 2015* (9–22). Praha: UK-PedF.

[2] Novotná, J. (2000). *Analýza řešení slovních úloh.* Praha: UK-PedF.

[3] Nováková, H. (2013). Analýza a priori jako součást přípravy učitele na výuku. *Scientia in educatione*, 4(2), 20–51.

[4] Sarrazy, B. & Novotná, J. (2013). Mathematical creativity and highly able students: What can teachers do? In B. Ubuz, Ç. Haser, M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of CERME 8* (1245–1253). Ankara: Middle East Technical University.

[5] Pólya, G. (2004). *How to solve it: A new aspect of mathematical method (Expanded Princeton Science Library ed.)*. Princeton: Princeton University Press.