L i t e r a t u r a

[1] *O'Connor, J. J., Robertson, E. F.*: Horner Biography. MacTutor History of Mathematics archive [online]. University of St Andrews, St. Andrews, 2018 [cit. 2018-09-11]. Dostupné z: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Horner.html

[2] *Wikipedie*: Otevřená encyklopedie: William George Horner [online]. c2018 [cit. 2018-09-11]. Dostupné z: https://en.wikipedia.org/wiki/William_George_Horner

[3] *Hanák, D.*: Hornerovo schéma. Itnetwork.cz: Ajťácká sociální síť a materiálová základna pro C#, Java, PHP, HTML, CSS, JavaScript a další [online]. Praha, c2018 [cit. 2018-09-11]. Dostupné z: https://www.itnetwork.cz/algoritmy/matematicke/algoritmus-matematicke-hornerovo-schema

[4] Horner's Method. Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles [online]. Alexander Bogomolny, c1996–2017 [cit. 2018-09-11]. Dostupné z: http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Calculus/HornerMethod.shtml#

[5] Horner's Rule for a Polynomial and Its Derivative. Computational Physics with C++ [online]. University of Utah, Salt Lake City, Utah, 2003, 2007-08-17 [cit. 2018-09-11]. Dostupné z: http://www.physics.utah.edu/~detar/lessons/c++/array/node4.html

Procházky (nejen) po krychli

VLASTA MORAVCOVÁ – JARMILA ROBOVÁ – KAREL PAZOUREK

MFF UK, Praha – MFF UK, Praha – Gymnázium, Třeboň

Prostorová představivost je důležitou součástí matematického vzdělávání na základních a středních školách. To dokládá i *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*, kde dovednost orientovat se v prostoru patří k očekávaným výstupům vzdělávání v matematice již na prvním stupni [1, s. 32] a řešení úloh na prostorovou představivost se předpokládá i na druhém stupni základní školy. Ani střední školy nezapomínají na rozvíjení této dovednosti, například *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia* uvádí, že vzdělávání v matematice vede žáka k rozvíjení geometrického vidění a prostorové představivosti [2, s. 22].

Na základě potřeby soustavněji rozvíjet prostorovou představivost, která vyplynula ze zkušeností z výuky matematiky na Gymnáziu v Třeboni i z výuky budoucích učitelů matematiky na MFF UK, jsme se rozhodli v rámci v projektu OP VVV – SC2/SC5 *Zvýšení kvality vzdělávání žáků, rozvoje klíčových kompetencí, oblastí vzdělávání a gramotností* zaměřit na rozvíjení této dovednosti, a to formou, která je přístupná žákům základní i střední školy a není náročná na čas.

Prostorová představivost

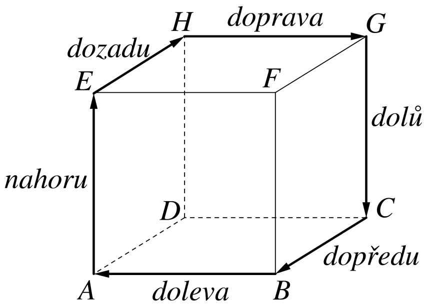
Prostorová představivost patří k základním schopnostem člověka a je ovlivňována nejen jeho vrozenými vlohami, ale také prostředím, výchovou i zkušenostmi. Tato představivost souvisí se schopností jedince vytvářet si představy o prostorových objektech a vztazích mezi nimi, přičemž se nemusí vždy jednat o objekty, se kterými se již setkal či které reálně existují. Pojem prostorové představivosti z hlediska výuky matematiky souvisí s geometrickou představivostí. Například Šarounová [7] chápe prostorovou představivost jako soubor schopností, souvisejících s představami jedince o prostoru, tvarech a vzájemných vztazích mezi předměty i jednotlivými částmi těla. Prostorovou představivost s geometrickým obsahem pak nazývá geometrickou představivostí. Obdobně Molnár, Perný a Stopenová [3] nazírají na prostorovou představivost potřebnou ve stereometrii jako na geometrickou prostorovou představivost. Tímto pojmem označují soubor schopností týkajících se reprodukčních i anticipačních, statických i dynamických představ o tvarech, vlastnostech a vzájemných vztazích mezi geometrickými útvary v prostoru. Podrobný přehled různých vymezení pojmů souvisejících s prostorovou představivostí uvádí Molnár [4].

Prostorová představivost zahrnuje komplex schopností, které mají u různých jedinců odlišnou úroveň. Někteří autoři hovoří o složkách prostorové představivosti. Juščáková (2002, cit. v [3]) identifikovala tyto její složky: pasivní prostorovou orientaci související s určením polohy, vizuální paměť spočívající ve schopnosti manipulovat s obrazy objektů v paměti, aktivní prostorovou orientaci související se zpracováním představ o pohybu objektů, mentální manipulaci (percepční předvídání, schopnost tvořit novou představu objektu po jeho transformaci), manuální manipulaci a technickou tvořivost v prostorové představivosti, tj. schopnost aplikovat ji za určitých podmínek.

K dispozici jsou různé druhy úloh, které přispívají k rozvoji prostorové představivosti, např. [3]. Na základě této inspirace jsme se rozhodli sestavit vlastní sadu úloh[1)] s postupně narůstající obtížností a vyzkoušet ji ve výuce. Připravené úlohy by měly přispět k rozvíjení prostorové představivosti, zejména jejich dvou výše uvedených složek, a sice prostorové orientace a mentální manipulace s prostorovými objekty. Úlohy byly zamýšleny jako mentální rozcvičky na úvod hodin matematiky věnovaných stereometrii. Vzhledem k plánované formě jsme je navrhli tak, aby nezabraly více než 10 minut (s výjimkou první hodiny, v níž je třeba zavést terminologii a vysvětlit princip řešení úloh).

Procházky po krychli

V úlohách pracujeme s krychlí $ABCDEFGH$, jejíž vrcholy jsou popsány obvyklým způsobem. Stěny označíme jako přední ($ABFE$), zadní ($DCGH$), levá ($ADHE$), pravá ($BCGF$), dolní ($ABCD$) a horní ($EFGH$). Používáme šest směrů pohybu po orientovaných hranách krychle (obr. 1) – doleva (posun o vektor $\overrightarrow{BA}$), doprava (posun o vektor $\overrightarrow{HG}$), nahoru (posun o vektor $\overrightarrow{AE}$), dolů (posun o vektor $\overrightarrow{GC}$), dopředu (posun o vektor $\overrightarrow{CB}$) a dozadu (posun o vektor $\overrightarrow{EH}$). V obtížnějších úlohách přidáváme pohyb po stěnových úhlopříčkách (napříč stěnou) a po tělesových úhlopříčkách (napříč krychlí). Připravené úlohy jsme rozdělili do pěti typů A až E, které se liší způsobem zadání i obtížností, která je postupně gradována. Obtížnost úloh se vždy stupňuje také v rámci série úloh jednoho typu.



Obr. 1 Popis krychle a směry pohybu

[1)] V tomto článku uvádíme jen několik ukázek, kompletní sada úloh je dostupná v příloze, viz: „Prochazky po krychli“

Úlohy typu A

Úlohy A1 až A17 z první série zadáváme následovně. Žákům sdělíme, ve kterém vrcholu krychle se na začátku procházky nacházíme. Poté diktujeme nebo zapisujeme na tabuli posloupnost směrů pohybu a žáci si představují trasu, po níž se pohybujeme. Výsledkem je koncový bod, do kterého dorazíme, ale můžeme se ptát i na posloupnost všech vrcholů, kterými jsme prošli. V prvních šesti úlohách se pohybujeme pouze po hranách krychle.

Zadání úlohy A1

Začínáme ve vrcholu A. Pohybujeme se: dozadu – vpravo – nahoru. Jaký je koncový bod?

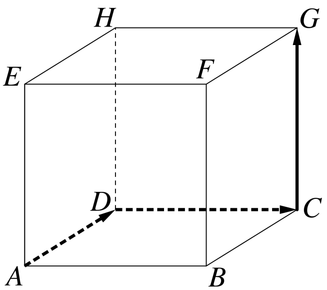
Řešení. Koncový bod je G (posloupnost všech navštívených bodů je A, D, C, G), obr. 2.

Počínaje úlohou A7 přidáváme do zadání pohyb po stěnových úhlopříčkách, od úlohy A12 po tělesových úhlopříčkách. Pro porovnání obtížnosti se podívejme ještě na poslední úlohu typu A.

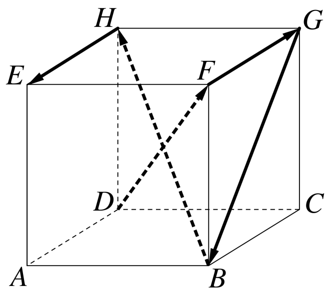
Zadání úlohy A17

Začínáme ve vrcholu D. Pohybujeme se: napříč krychlí – dozadu – napříč pravou stěnou – napříč krychlí – dopředu. Jaký je koncový bod?

Řešení. Koncový bod je E (posloupnost všech navštívených bodů je D, F, G, B, H, E), obr. 3.



Obr. 2 Řešení úlohy A1



Obr. 3 Řešení úlohy A17

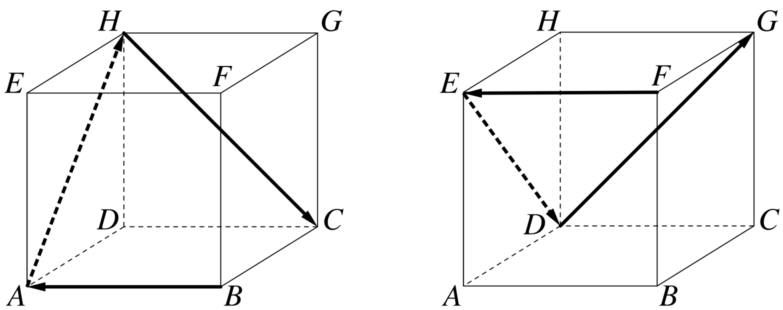
Úlohy typu B

V úlohách B1 až B8 není zpočátku známý počáteční bod trasy, pouze zadáme posloupnost směrů pohybu. Úkolem žáků je určit počáteční i koncový bod. V prvních pěti úlohách se pohybujeme pouze po hranách krychle, ve zbývajících třech i po úhlopříčkách. Řešení těchto úloh již není vždy jednoznačné – záleží pak na učiteli, zda chce po žácích najít jedno, anebo všechna řešení.

Zadání úlohy B7

Pohybujeme se: doleva – napříč levou stěnou – napříč zadní stěnou. Jaký je počáteční a koncový bod?

Řešení. Úloha má dvě řešení – buď je počátečním bodem B a koncovým C, nebo je počátečním bodem F a koncovým G, obr. 4.



Obr. 4 Obě řešení úlohy B7

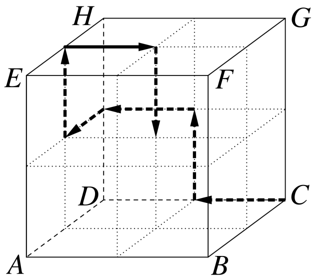
Úlohy typu C, D a E

V dalších typech úloh pracujeme navíc se vzdálenostmi. V šesti úlohách typu C, které jsou analogií úloh typu A, uvažujeme krychli o hraně délky dvě jednotky. V každém kroku se vždy posuneme o jednotku délky v daném směru pohybu. To nám umožní dostat se i do středu hrany, stěny nebo krychle. V těchto úlohách se nepohybujeme po úhlopříčkách.

Zadání úlohy C3

Začínáme ve vrcholu C. Pohybujeme se: doleva – nahoru – doleva – dopředu – nahoru – doprava – dolů. Jaký je koncový bod?

Řešení. Koncový bod je střed krychle (posloupnost všech navštívených bodů je C, S_{CD}, S_{CH}, S_{DH}, S_{DE}, S_{EH}, S_{EG}, S_{AG}),[2] obr. 5.



Obr. 5 Řešení úlohy C3

Úlohy typu D a E se od typu C liší jen ve zvolené délce hrany krychle. Ve čtyřech úlohách typu D pracujeme s krychlí o hraně délky 4 jednotky, ve třech úlohách typu E uvažujeme hranu dlouhou 10 jednotek. V každém kroku se pak posouváme v daném směru pohybu vždy o daný počet jednotek.

Zařazení úloh do výuky

Typy A, B a D[3] výše uvedených úloh byly v říjnu až prosinci roku 2017 zařazeny do výuky třetího ročníku čtyřletého Gymnázia v Třeboni, sekundy a sexty šestiletého Gymnázia Na Pražačce v Praze a druhého ročníku bakalářského studia učitelství matematiky na MFF UK v Praze.

V každé skupině pracoval vyučující s úlohami trochu jinak. Vždy však byl žákům a studentům nejprve představen model krychle, vysvětleny směry pohybu a při zavedení úloh nového typu byla vzorově vyřešena první úloha.

V sekundě šestiletého gymnázia (odpovídá 9. ročníku ZŠ) žáci v rámci jedné vyučovací hodiny řešili úlohy typu A a B. Zpočátku měli k dispozici obrázek s vyznačenými směry pohybu, který byl nakreslen na tabuli, a několik drátěných modelů krychle. Jelikož žáci s úlohami typu A neměli potíže, byl nejprve zakryt obrázek, posléze i schovány modely krychlí.

[2] Symbolem S_{XY} značíme střed úsečky XY. Můžeme však body označovat slovy jako střed hrany XY, střed přední/zadní/... stěny apod.

[3] Původní verze sady úloh, která byla testována ve výuce, obsahovala pouze tři typy úloh označené A, B, C, přičemž typ C odpovídal současnému typu D – tedy jednalo se o úlohy s krychlí o hraně délky 4 jednotky.

S úlohami typu B již většina žáků měla potíže, proto jim byly opět vráceny drátěné modely.

V předmaturitním a maturitním ročníku gymnázií bylo s úlohami pracováno obdobným způsobem. V období, kdy žáci probírali stereometrii, bylo úlohám věnováno cca 5 až 10 minut ze začátku několika vyučovacích hodin. Postupně byly vyzkoušeny úlohy všech tří typů. S úlohami typu A neměli žáci větší potíže, u úloh typu B se již objevovaly chyby, nejtěžší byly úlohy typu D, v nichž chybovala více než polovina žáků.

Žáci třetího ročníku měli zpočátku k dispozici obrázek i drátěný model krychle, u úloh typu A byl postupně schován nejprve obrázek, poté model. K řešení úloh typu B a D jim byl ponechán model. Zadání úloh typu D měli napsané na tabuli, mohli tak úlohy řešit vlastním tempem.

Žáci maturitního ročníku měli rovněž zpočátku k dispozici obrázek i drátěný model, po prvních dvou úlohách jim byl schován obrázek (a nesměli použít ani vlastní), na další hodině již neměli k dispozici ani model krychle, pouze nový typ úloh byl vždy vysvětlen s obrázkem nebo s modelem. Ukázalo se, že v okamžiku, kdy nemají k dispozici ani obrázek ani model krychle, mají tendenci používat vlastní pomůcku (gumu ve tvaru kvádru, pozorování hran stolu či reproduktoru, manipulace rukama apod.) a stále většina z nich řešila úlohy typu A a B bez obtíží, chyby se objevovaly jen výjimečně. Byli tedy vyzváni, aby dali ruce za záda a zavřeli oči. Teprve v tuto chvíli pro ně řešení úloh začalo být komplikovanější, na druhou stranu je tato aktivita velmi bavila. Ve třídě byli také dva slabší žáci, kteří si s úlohami od A7 dále bez modelu krychle neporadili. Nejprve tedy zkoušeli řešit úlohy za stejných podmínek jako ostatní, ale při kontrole výsledku dostali vždy na chvíli do ruky model, aby se ke správnému řešení dobrali také vlastními silami. Úlohy typu D byly vyzkoušeny též s postupným omezováním pomůcek, ale ukázalo se, že bez modelu nebo obrázku je bez chyby vyřeší skutečně jen málokdo. Podobně jako u žáků třetího ročníku se osvědčilo zadání úloh typu D psát na tabuli, ne jen diktovat. K zápisu byly úspěšně využity také zkratky vycházející z anglických pojmenování směrů – viz dále.

Se studenty druhého ročníku učitelství bylo pracováno podobným způsobem jako s žáky vyšších ročníků gymnázií. Po dobu dvou měsíců řešili úlohy všech tří typů, vždy cca 10 minut v úvodu výuky *Základů prostorové geometrie*. Na úvod každého semináře byla studentům předvedena jedna úloha s využitím promítnutého obrázku krychle s vyznačenými směry, poté byl obrázek skryt. Po celou dobu byly na katedře k dispozici také dva papírové modely krychle, jeden z nich o hraně dlouhé 4 cm měl na stěnách nakreslenou čtvercovou síť s čtverečky o straně délky 1 cm. První problémy se objevily u úlohy A3[4)] a dále u úloh, v nichž byl zapojen také pohyb po úhlopříčkách. Stejně jako pro gymnazisty, úlohy typu B byly obtížnější než A a nejtěžší byly úlohy typu D, k jejichž řešení si někteří posluchači vypůjčili model krychle, popřípadě používali vlastní pomůcky připomínající tvar krychle.

Ve všech skupinách se potvrdilo, že úlohy jsou řazeny se stupňující se obtížností, a to jak s ohledem na jednotlivé typy A, B, D, tak s ohledem na řazení úloh v rámci jednoho typu. Úlohy A1 až A6 nečinily v žádném ročníku vážnější problémy, první komplikace nastaly u zapojení pohybu po úhlopříčkách. Mladší žáci navrhovali, že by jim pomohla změna formulace – namísto *napříč stěnou/krychlí* by uvítali slova *po úhlopříčce stěny/krychle*. Při řešení úloh typu B se již žáci sekundy, ale i někteří starší žáci včetně studentů VŠ neobešli bez modelu. Úlohy typu D byly pro většinu žáků i studentů bez obrázku nebo modelu téměř neřešitelné.

Při testování bylo vyzkoušeno několik možností, jak zvýšit obtížnost úloh. Nejsnadnější pro žáky bylo řešení s možností pozorování obrázku s vyznačenými směry pohybu. Výbornou pomůckou byl také model krychle, přičemž drátěný model se osvědčil jako názornější pro řešení úloh typu D (umožňuje modelovat pohyb uvnitř krychle). Na základě pozorování práce žáků nelze jednoznačně říci, zda pro ně byl užitečnější obrázek nebo model, obě pomůcky fungovaly jako dostatečná podpora pro nalezení řešení. Pokud chtěl vyučující úlohy zkomplikovat, schoval obrázek i model krychle a zakázal použití vlastní pomůcky. V tuto chvíli měli žáci i studenti tendenci vyhledávat očima předmět tvarově příbuzný krychli a pozorovat jej, někteří začali modelovat procházku po krychli pomocí rukou. Dalším stupněm obtížnosti tedy je zákaz použití rukou (např. lze žáky požádat, aby dali ruce za záda) a nejvyšším omezením je požadavek řešit úlohy se zavřenýma očima. Teprve v tuto chvíli lze říci, že žáci museli pracovat skutečně čistě mentálně a jen jedinci byli schopni takto vyřešit úlohy typu B a D.

Další inspirace

Představené úlohy lze propojovat s dalšími předměty či oblastmi matematiky. Rovněž nás inspirují k různým obměnám, ztíženým variantám a problémovým otázkám pro nadanější žáky.

[4)] Možná proto, že se jedná o první úlohu s více kroky.

Zapojení cizího jazyka

Při písemném zadání výše uvedených úloh se nabízí zavedení zkratek pro jednotlivé směry pohybu. Jelikož některé pokyny v češtině začínají stejným písmenem ($d$opředu, $d$ozadu apod.), navrhujeme zapojení cizího jazyka. Většině současných žáků nečiní potíže použít angličtinu.

Pro šest základních pohybů ve směrech orientovaných hran krychle můžeme zavést například zkratky L ($l$eft – doleva), R ($r$ight – doprava), U (up – nahoru), D ($d$own – dolů), F ($f$orward – dopředu), B ($b$ack – dozadu).[5)] Podobně lze využít vhodná slovíčka z němčiny a jistě bychom nalezli i další vhodné jazyky.

Užití vektorové algebry

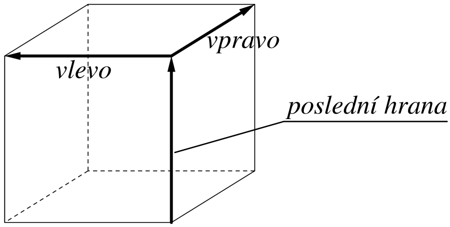
Bystřejší žáci možná sami postřehnou, že si mnohá zadání procházek po hranách krychle mohou značně zjednodušit. Pokud máme v libovolném pořadí vykonat v rámci jedné úlohy například třikrát pohyb vlevo a dvakrát vpravo, je to totéž, jako jít jednou vlevo. Pět pokynů tak můžeme nahradit pouze jedním. Nejedná se vlastně o nic jiného než skládání opačných vektorů. Největšího zjednodušení docílíme užitím tohoto principu u úloh typů C, D a E.

Relativní směr pohybu

Procházku po krychli si můžeme představit také z pohledu pozorovatele, který se po dané krychli pohybuje. V okamžiku, kdy dojde po hraně do určitého vrcholu, vždy může dále pokračovat buď vlevo, nebo vpravo (za předpokladu, že se nesmí vracet zpět), viz obr. 6. Tento typ úloh lze žákům demonstrovat na modelu krychle, který budeme postupně natáčet vždy do takové polohy, v níž bude hrana, kterou právě procházíme, umístěna přibližně ve směru pohledu žáků. V připravené sadě úloh jsou tímto způsobem zpracovány úlohy F1 až F4.[6)]

[5)] Například úlohu A1 lze pak zadat pomocí následujícího kódu (po sdělení počátečního bodu): B–R–U; úlohu D1 můžeme zadat (po sdělení počátečního bodu) kódem 2R–3U–2R–1B–1U.

[6)] Za inspiraci děkujeme doc. RNDr. Antonínu Jančaříkovi, Ph.D., z Pedagogické fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

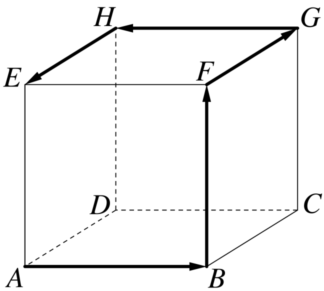


Obr. 6 Relativní směr pohybu

Zadání úlohy F1

Jdeme z A do B, z vrcholu B poté pokračujeme: vlevo – vpravo – vlevo – vlevo. Jaký je koncový bod?

Řešení. Koncový bod je E (posloupnost všech navštívených bodů je A, B, F, G, H, E), obr. 7.



Obr. 7 Řešení úlohy F1

Procházky po tetraedru

Výše popsaný relativní směr pohybu lze aplikovat na každý mnohostěn, v jehož vrcholech se setkávají vždy tři hrany.[7)] V úlohách G1 až G4 pracujeme tímto způsobem s pravidelným čtyřstěnem. V principu však nezáleží na tom, zda je čtyřstěn pravidelný, je možné, že někteří žáci si lépe představí jiný, například pravoúhlý čtyřstěn.[8)]

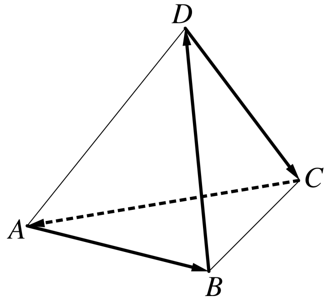
[7)] Pro mnohostěny, v jejichž vrcholech se setkávají vždy čtyři hrany, lze analogicky zavést termíny *vlevo, rovně, vpravo.*

[8)] Pravoúhlým čtyřstěnem rozumíme například těleso $ABDE$ získané z krychle $ABCDEFGH$, tedy trojboký jehlan, jehož jedna boční hrana je kolmá k rovině podstavy.

Zadání úlohy G1

Jdeme z A do B, z vrcholu B poté pokračujeme: vlevo – vpravo – vlevo. Jaký je koncový bod?

Řešení. Koncový bod je A (posloupnost všech navštívených bodů je A, B, D, C, A), obr. 8.



Obr. 8 Řešení úlohy G1

Námět na problémové otázky

Máme-li ve třídě šikovné žáky, můžeme úlohy doplnit problémovými otázkami. Například pro úlohy typu A: „Vycházíme z bodu A a můžeme zadat tři směry pohybu. Ve kterých bodech může procházka skončit, pokud se pohybujeme a) pouze po hranách krychle, b) po hranách i úhlopříčkách krychle?“ Budeme-li uvažovat pouze pohyb po hranách tělesa, můžeme tuto otázku položit i u procházek typů C, D a E. Problém lze modifikovat také pro úlohy typů F a G: „Jdeme z A do B, z vrcholu B poté pokračujeme třemi kroky. Do kterých vrcholů se můžeme dostat?“

Závěr

Autoři příspěvku vyzkoušeli ve výuce úlohy zde představené jako typ A, B a D (úlohy typu D s hranou o délce 4 byly původně označeny jako typ C). První dva typy jsou převzaté z práce [3] a již dříve byly experimentálně ověřeny s žáky ve věku 9–14 let [5]. Obdobně jako Perný [6] jsme v mnoha případech pozorovali tzv. *kinestetický jev*, tj. tendenci zapojit při řešení úloh pohyb těla, popřípadě alespoň očí. U některých jedinců byl patrný také *jazykový jev*, tj. potíže s rozdílným chápáním terminologie pohybu po tělesech. V úlohách typu B žáci i studenti zpravidla objevili pouze jedno z více možných řešení.

S třetím typem vyzkoušených úloh, v nichž uvažujeme hranu krychle delší než jednotkovou, jsme se zatím nikde nesetkali. Tyto úlohy se ukázaly

zaly jako nejkomplikovanější, neboť je v nich třeba uvažovat i vnitřní body krychle. Proto jsme původní sadu úloh, v nichž žákům byla rovnou předložena hrana o délce 4, doplnili ještě úlohami s hranou délky 2, aby gradace obtížnosti byla pozvolnější.

Ve všech zapojených skupinách se projevila pozitivní motivace. Zařazením vždy několika „procházek“ na začátek hodiny se žáci i studenti aktivizovali a rychleji než obvykle „přepnuli do pracovního módu“. Časově jsou úlohy nenáročné a lze je používat průběžně a opakovaně za účelem systematického procvičování prostorové představivosti. Široká škála zadání s postupně rostoucí obtížností umožňuje volit úroveň úloh adekvátní schopnostem a věku žáků, slabší jedinci mají možnost prožít pocit úspěchu a šikovnějším můžeme úlohy zajímavě zkomplikovat. Vyzkoušením úloh s věkově rozdílnými skupinami se ukázalo, že úlohy mohou být vhodné a smysluplné nejen pro žáky základní a střední školy, ale i pro studenty vysoké školy.

Poděkování. Příspěvek vznikl v rámci projektu *Zvýšení kvality vzdělávání žáků, rozvoje klíčových kompetencí, oblastí vzdělávání a gramotností*, reg. č. CZ.02.3.68/0.0/0.0/16_011/0000664 (2017–2019), financováno z Evropských sociálních fondů, řešiteli projektu jsou Univerzita Karlova, Masarykova univerzita, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích a Technická univerzita v Liberci.

Literatura

[1] *MŠMT*: Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání [online]. Praha, 2017, [cit. 2018-10-30]. Dostupné z: www.msmt.cz/file/43792_1_1

[2] *MŠMT*: Rámcový vzdělávací program pro gymnázia [online]. Praha, 2007, [cit. 2018-10-30]. Dostupné z: www.nuv.cz/file/159_1_1

[3] *Molnár, J., Perný, J., Stopenová, A.*: Prostorová představivost a prostředky k jejímu rozvoji [online]. JČMF, 2006 [cit. 2017-09-24]. Dostupné z: http://class.pedf.cuni.cz/NewSUMA/FileDownload.aspx?FileID=100

[4] *Molnár, J.*: Rozvíjení prostorové představivosti (nejen) ve stereometrii. 2. rozšířené vydání, Vydavatelství Univerzity Palackého, Olomouc, 2009.

[5] *Perný, J.*: Krychle, pohyb a prostorová představivost (1). Učitel matematiky, 12(2004a), 176–183.

[6] *Perný, J.*: Krychle, pohyb a prostorová představivost (2). Učitel matematiky, 12(2004b), 221–230.

[7] *Šarounová, A.*: Geometrická představivost. Disertační práce, Univerzita Karlova, Praha, 1982.