Vzdělávací modul
Matematická gramotnost

Náměty na aktivity rozvíjející matematickou gramotnost

Daniela Bímová a kol.

Zvýšení kvality vzdělávání žáků, rozvoje klíčových kompetencí, oblastí vzdělávání a gramotností

Pedagogická fakulta, Univerzita Karlova, 2019

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
OP Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Vzdělávací modul
MATEMATICKÁ GRAMOTNOST

Vzdělávací modul Matematická gramotnost

Náměty na aktivity rozvíjející matematickou gramotnost

Daniela Bímová, Růžena Blažková, Jiří Břehovský, Irena Budínová, Kamila Hrčková, Antonín Jančařík, Darina Jirotková, Štěpánka Kaňková, Jaroslava Kloboučková, Vlasta Moravcová, Hana Nováková, Jarmila Novotná, Jarmila Robová, Libuše Samková, Naďa Vondrová

Univerzita Karlova
Pedagogická fakulta
2019

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
OP Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Vzdělávací modul Matematická gramotnost

Náměty na aktivity rozvíjející matematickou gramotnost

Publikace vznikla v rámci projektu *Zvýšení kvality vzdělávání žaků, rozvoje klíčových kompetenci, oblastí vzdělávání a gramotností, reg. č. CZ.02.3.68/0.0/0.0/16_011/0000664 (2017–2019), financováno z Evropských sociálních fondů, řešiteli projektu jsou Univerzita Karlova, Masarykova univerzita, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Technická univerzita v Liberci a META, o.p.s.*

Publikace je určena ke vzdělávacím účelům.

Hlavní manažer projektu Univerzity Karlovy:
doc. PhDr. PaedDr. Anna Kucharská, Ph.D.

Manažer projektu Masarykovy univerzity:
doc. PhDr. Petr Knecht, Ph.D.

Manažer projektu Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích:
doc. RNDr. Helena Koldová, Ph.D.

Manažer projektu Technické univerzity v Liberci:
doc. RNDr. Miroslav Brzezina, CSc.

Manažer projektu – META, o.p.s.:
PhDr. Kristýna Titěrová

Autoři publikace:
Daniela Bímová, Růžena Blažková, Jiří Břehovský, Irena Budínová, Kamila Hrčková, Antonín Jančařík, Darina Jirotková, Štěpánka Kaňková, Jaroslava Kloboučková, Vlasta Moravcová, Hana Nováková, Jarmila Novotná, Jarmila Robová, Libuše Samková, Naďa Vondrová

Řešitelský kolektiv:
Daniela Bímová, Růžena Blažková, Jiří Břehovský, Irena Budínová, Karolina Duschinská, Kamila Hrčková, Antonín Jančařík, Darina Jirotková, Štěpánka Kaňková, Jaroslava Kloboučková, Vlasta Moravcová, Tatiana Mutinová, Hana Nováková, Jarmila Novotná, Martin Pařízek, Jarmila Robová, Libuše Samková, Hana Sotáková, Štěpánka Šípošová, Michaela Ulrychová, Naďa Vondrová, Marta Vrtišová

Garant vzdělávacího modulu Matematická gramotnost:
Jarmila Robová

Recenzenti:
PhDr. Jana Cachová, Ph.D.
Mgr. Jana Hanušová, Ph.D.

Poděkování:
Rádi bychom touto cestou poděkovali všem učitelům zapojeným v projektu ve vzdělávacím modulu Matematická gramotnost za jejich náměty, zkušenosti a doporučení k jednotlivým kapitolám této brožury a v neposlední řadě za to, že nás nechali nahlédnout do svých hodin.

Vydala:
Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta v r. 2019

ISBN: 978-80-7603-059-6

Abstrakt

Tato brožura vznikla s cílem podpořit profesní kompetence učitelů související s rozvíjením matematické gramotnosti žáků na základních školách a víceletých gymnáziích. Obsahuje sedm metodických materiálů, které jsou postupně zaměřeny na různé oblasti vyučování matematice: od propojení témat, přes porozumění některým základním pojmům (míra v geometrii, soustava souřadnic aj.), rozvíjení představivosti a schopností žáků včetně řešení slovních úloh až po individuální a diferencovaný přístup k žákům. Každý materiál začíná abstraktem, který přibližuje jeho obsah a strukturu. Následují aktivity určené pro žáky doplněné metodickými komentáři a poznámkami. Specifikem nabízených materiálů je skutečnost, že byly vyzkoušeny (často i opakovaně) přímo s žáky ve výuce. Zkušenosti s použitím materiálů jsou shrnuty v jednotlivých kapitolách. Věříme, že budou inspirativní i pro další učitele.

Klíčová slova:
diferenciace, individualizace, matematická gramotnost, míra, pojmy, představivost, průřezová témata, rozvíjení schopností, slovní úlohy

Abstract

This brochure was developed to support teachers‘ professional competencies related to the development of pupils’ mathematical literacy at primary schools and lower secondary schools. It contains seven methodological materials, which are focused on different areas of mathematics teaching: from interconnection of topics, understanding some concepts (such as measure in geometry, coordinate system, etc.) through developing pupils‘ imagination and their abilities including solving word problems up to individual and differentiated approaches to the pupils. Each material begins with an abstract that explains its content and structure. The activities designed for pupils supplemented by methodical comments follow. The specific feature of the materials is that they were trialled (sometimes repeatedly) in school practice. The reflection of these trials is provided in each material. We believe that this experience will be an inspiration for practising teachers, too.

Key words:
differentiation, individualization, mathematical literacy, measure, concepts, imagination, cross-cutting themes, developing abilities, word problems

Obsah

Úvod

V rámci vzdělávacího modulu *Matematická gramotnost* projektu OP VVV *Zvýšení kvality vzdělávání žáků, rozvoje klíčových kompetencí, oblastí vzdělávání a gramotností* se kolektiv autorů zabýval tím, jak podpořit profesní kompetence učitelů při rozvíjení matematické gramotnosti žáků na základních školách i víceletých gymnáziích. Na základě podnětů od učitelů zapojených v projektu bylo vymezeno sedm tematických okruhů, ve kterých postupně vznikaly metodické materiály určené pro výuku matematiky. Tyto materiály vytvářeli společně učitelé z praxe a didaktici matematiky z vysokých škol za podpory odborníků na psychologii a pedagogiku. Materiály byly poté prodiskutovány na společných setkáních, ověřeny ve výuce a upraveny do výsledné podoby.

Každá ze sedmi kapitol této publikace přináší příklad z jednoho tematického okruhu, na kterém se v projektu pracovalo, a obsahuje metodický materiál prověřený ve školské praxi. Jedná se o následující okruhy (v pořadí dle kapitol): Průřezová témata v matematice, Míra v geometrii, Geometrická představivost, Geometrické pojmy a vztahy, Rozvíjení schopností v matematice, Slovní úlohy, Individualizovaný a diferencovaný přístup v matematice.

Témata jednotlivých materiálů odpovídají aktuálním potřebám učitelů zapojených v projektu. První kapitola je zaměřena na využití pomůcky geoboard při odvozování obvodů a obsahů trojúhelníků a je zde ukázáno možné propojení s technickou výchovou. Druhá kapitola je věnována podnětnému zavedení některých vzorců z oblasti míry v geometrii, konkrétně povrchu a objemu válce a kužele. Ve třetí kapitole zaměřené na geometrickou představivost je uveden metodický materiál na odvození Pythagorovy věty za podpory vizualizace matematických situací v programu GeoGebra. Čtvrtá kapitola se zabývá jedním ze základních geometrických pojmů, a to kartézskou soustavou souřadnic. Je zde ukázáno, jak lze procvičování dovedností spojených se soustavou souřadnic zařadit do dalších oblastí školské matematiky. Pátá kapitola se zabývá rozvíjením schopností žáků v matematice a ukazuje náměty pro rozvíjení jejich algebraického myšlení na základě řešení úloh z aritmetiky na prvním i druhém stupni základní školy. Šestá kapitola je věnována heuristickým strategiím při řešení slovních úloh z různých oblastí. Sedmá kapitola se pak zabývá individualizovaným a diferencovaným přístupem k žákům v hodinách matematiky, a to v tématu lomené výrazy.

Pro lepší přehled čtenáře obsahují jednotlivé kapitoly v úvodní části abstrakty, ve kterých se čtenář dozví podrobnější informace o jejich zaměření a obsahu. Na konci každé hlavní kapitoly je pak uvedeno stručné shrnutí zkušeností nejen z využití předkládaných metodických materiálů ve výuce matematiky, ale i z dlouhodobých pozorování výukových situací vážících se k danému tématu.

1. Využití pomůcky geoboard při studiu metrických vlastností trojúhelníků a pravoúhelníků

Libuše Samková

Abstrakt:
Výukové materiály věnující se možnostem využití výukové pomůcky geoboard ve výuce geometrie, konkrétně při studiu metrických vlastností pravoúhelníků a trojúhelníků. Obsahem materiálů jsou návrhy dvou matematických vyučovacích hodin s touto pomůckou, které je možné mezipředmětově spojit s dvěma hodinami předmětu pracovní činnosti, kde si žáci pomůcku mohou sami vyrobit. Materiály jsou vhodné pro žáky druhého stupně ZŠ, případně nižšího gymnázia. Z matematického hlediska materiály procvičují témata obvod čtverce, obdélníku a z nich složených geometrických útvarů, obsah čtverce, obdélníku, trojúhelníku a z nich složených geometrických rovinných útvarů, a také řešení úloh s více možnými správnými řešeními. Podporují se manipulativní činnosti, propojuje se školská matematika s každodenní praxí, posilují se mezipředmětové vztahy.

Klíčová slova:
geoboard, obsah, obvod, pravoúhelník, trojúhelník

Abstract:
Learning materials focusing on possibilities to employ an educational tool called geoboard in geometry education, namely when studying metrical attributes of rectangles and triangles. The content of the materials consists of drafts of two mathematics lessons. These lessons could be preceeded by two technical education lessons where students might make their own speciments of the tool. The learning materials are suitable for 11 to 12 year old students. From the mathematical perspective, the materials focus on topics circumference of rectangles (including square) and figures composed of them and area of rectangles, triangles and figures composed of them, and also on solving multiple solution problems. The materials support manipulative activities, connect school mathematics to everyday practice, help to strengthen interdisciplinarity.

Keywords:
geoboard, area, circumference, rectangle, triangle

Cílová skupina:	žáci ve věku 11-12 let, 6. třída
Cíle materiálů:	propojení školské matematiky s každodenní praxí
	posílení mezipředmětových vztahů s fyzikou a technickou výchovou
	manipulační činnosti
	řešení nestandardních aplikačních úloh
	řešení úloh s více správnými řešeními
	procvičení tématu obvod, obsah čtverce a obdélníku, obsah trojúhelníku

Potřebný čas: dvě vyučovací hodiny předmětu matematika
dvě vyučovací hodiny předmětu pracovní činnosti (výroba pomůcky)

1.1 Úvod

Jedna z možností, jak na začátku studia na druhém stupni základní školy úspěšně navázat na stupeň první, spočívá v průběžném začleňování aktivit, na které jsou studenti zvyklí a které byly důležitou součásti jejich předchozího studia na 1. stupni ZŠ. K těmto aktivitám patřily manipulativní činnosti (ze kterých se odvíjí většina matematických znalostí na 1. stupni) a interdisciplinarita (která na 1. stupni přirozeně vzniká díky učiteli, který studenty obvykle vyučuje všem vyučovaným předmětům). Z rámcových vzdělávacích programů zároveň pro učitele vyvstává potřeba začleňovat do výuky nestandardní aplikační úlohy. V předkládaných výukových materiálech reagujeme na výše uvedené skutečnosti a představujeme plány dvou odzkoušených hodin matematiky, které se zaměřují na manipulativní činnosti v geometrii, které využívají výukové pomůcky geoboard a vedou k řešení nestandardních aplikačních úloh s více řešeními. Interdisciplinarity je možné dosáhnout propojením s předmětem pracovní činnosti, v rámci kterého si studenti mohou výukovou pomůcku geoboard sami vyrobit.

Výukové materiály byly odzkoušeny ve výuce, mají tedy podobu popisu konkrétních vyučovacích hodin, doplněného o návrhy (některých) správných řešení probíraných úloh. Shrnuty jsou také nejčastější žákovské chyby, které se při výuce objevily. Jsou také připojeny didaktické poznámky pro případné využití materiálů ve vyšších ročnících základní školy a nižšího gymnázia se studenty, kteří znají Pythagorovu větu a odmocniny.

1.2 Výuková pomůcka geoboard

Geometrická výuková pomůcka geoboard, česky také geodeska (Žilková, 2010; Klhůfková, 2016; Cachová a kol., 2015) je vyrobena z pevného dřevěného nebo plastového čtverce libovolné velikosti, na kterém jsou v pravidelných rozestupech umístěny hřebíčky nebo kolíčky tak, aby tvořily čtvercovou síť. Nejmenší používaný rozměr čtvercové sítě tvoří čtverec, jehož stranu tvoří 3 kolíčky, tedy čtverec o straně 2 jednotky. Ten se velice často používá na 1. stupni ZŠ. Na kolíčky je možné napínat gumičky, čímž vznikají obrysy různých rovinných útvarů. Máme-li zájem o větší pestrost tvarů na geoboardu, je možné zvolit větší čtvercovou síť, například o rozměru 6 x 6 kolíčků tak jako v tomto pracovním materiálu.

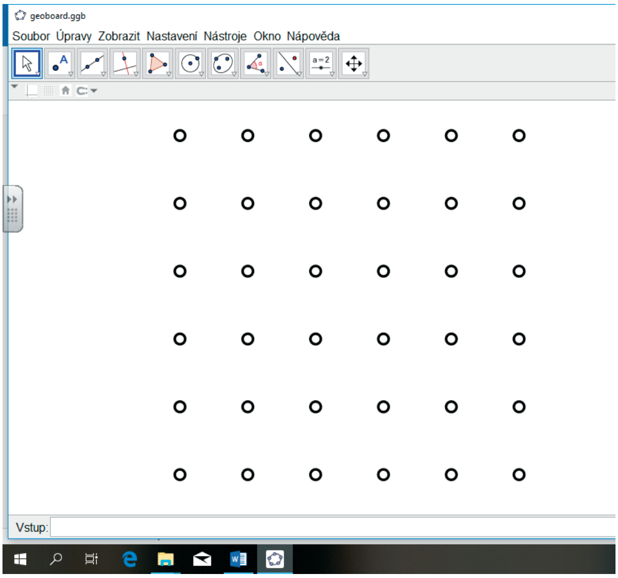
Geoboard si mohou děti samy vyrobit na hodinách pracovních činností nebo doma. Výhodou je, že podkladová deska nemusí mít nutně stejnou velikost, pro plynulý průběh vyučovací hodiny je důležitý pouze stejný počet kolíčků na desce. Náš pracovní materiál pracuje také s virtuální verzí geoboardu, která umožňuje zobrazovat různá řešení na interaktivní tabuli.

1.3 První vyučovací hodina

1) Seznámení se s pomůckou geoboard o rozměru 6 x 6 kolíčků a její virtuální verzí na interaktivní tabuli. Důležité je, aby žáci dokázali správně určit rozměry modelovaných obrazců

; 1 jednotka = 1 dílek mezi kolíčky.

Virtuální verze geobordu byla vytvořena jako statický obrázek (obr. 1.1) v software GeoGebra (GeoGebra, 2019).



Obr. 1.1: Virtuální verze geobordu

Během celé hodiny budou žáci pracovat ve skupinkách po 3–4 s dřevěným geoboardem. Na interaktivní tabuli budou průběžně zakreslovat řešení jednotlivých úloh, porovnávat je s řešeními ostatních, obhajovat správnost vlastních řešení a diskutovat je, hledat (všechna) další řešení. Pokud to umožňuje zadání úlohy, mohou také ověřovat, že už žádná další řešení neexistují.

2) Modelace libovolného čtverce, obdélníku, obecného, rovnoramenného a pravoúhlého trojúhelníku, mnohoúhelníků, různých složených obrazců (např. domeček).

3) Modelace čtverce, obdélníku, trojúhelníku podle daných rozměrů.

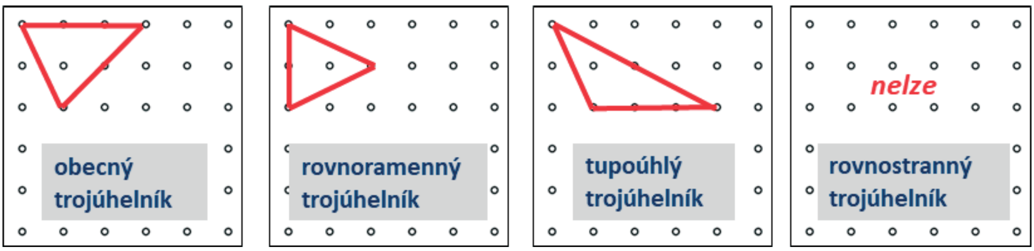
4) Jak vypadá obdélník, jehož:
   - obvod je 12 jednotek;
   - obvod je 8 jednotek;
   - obvod je 9 jednotek;

- obvod je 10 jednotek;
- obvod je 14 jednotek?

Najdi a vymodeluj všechna možná řešení a dopočítej jejich obsah.

5) Na geoboardu najdi:
- čtverec s nejmenším obvodem;
- čtverec s největším obvodem;
- obdélník s nejmenším obvodem;
- obdélník s největším obvodem;
- co největší obdélník se stranami lišícími se o 2 jednotky;
- co nejmenší obdélník se stranami lišícími se o 2 jednotky;
- co největší obdélník se stranami lišícími se o 3 jednotky;
- co nejmenší obdélník se stranami lišícími se o 3 jednotky;
- atd.

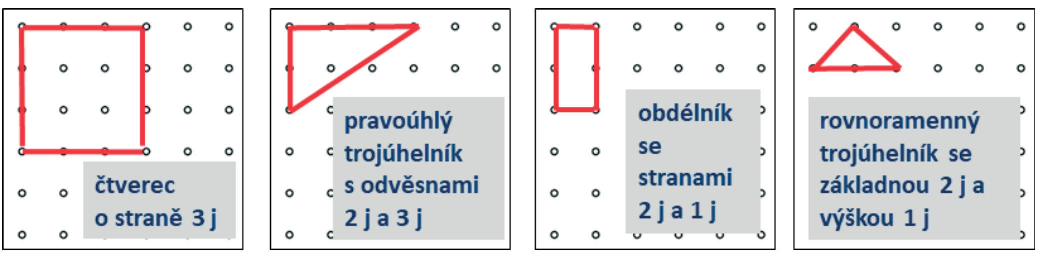
Následují některá řešení k bodu 2), viz obr. 1.2.



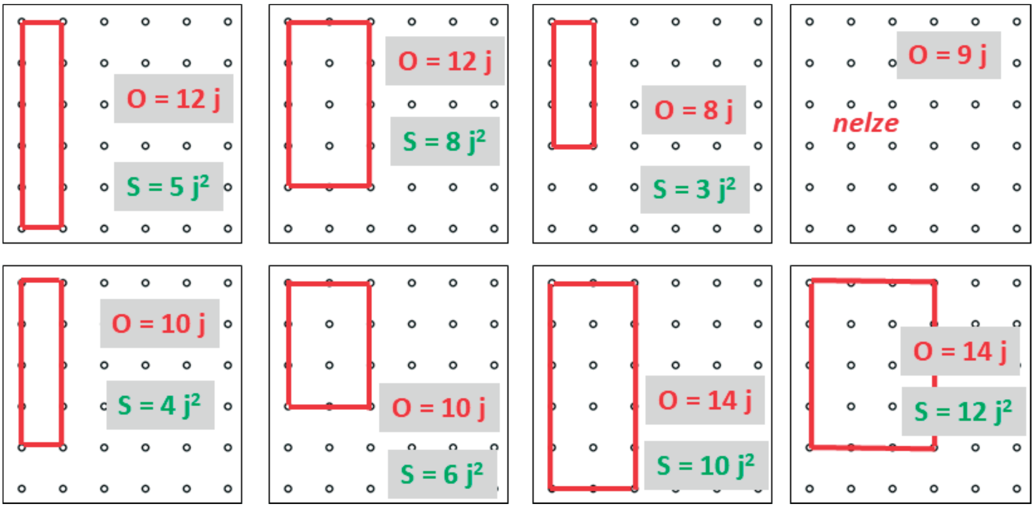
Obr. 1.2: Některá řešení úloh z bodu 2) pro trojúhelníky

Poznámka: Častou chybou bývá nesprávné označení trojúhelníku, který je druhý zleva na obr. 1.2, jako rovnostranného.

Dále uvádíme některá řešení k úlohám z bodu 3), viz obr. 1.3, a k úlohám z bodu 4), viz obr. 1.4.



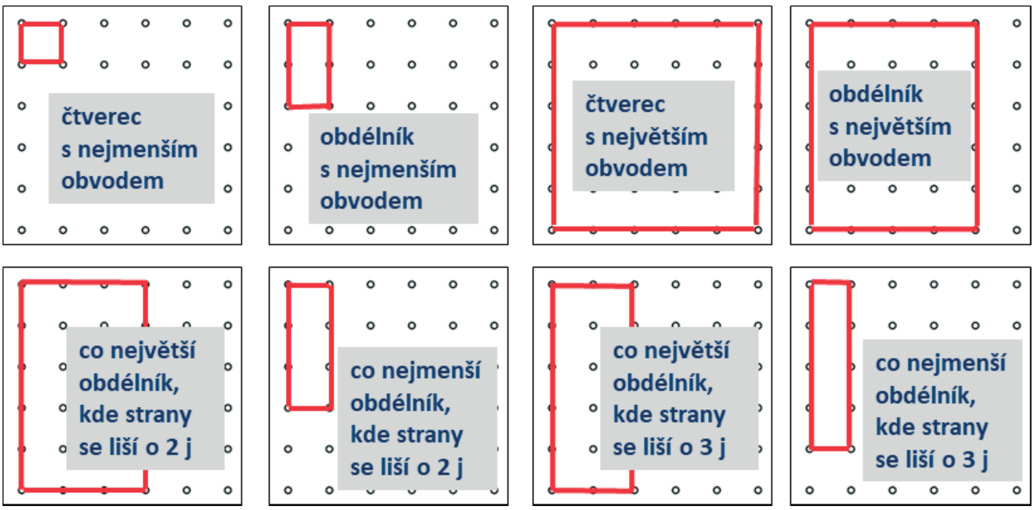
Obr. 1.3: Některá řešení úloh z bodu 3)



Obr. 1.4: Některá řešení úloh z bodu 4)

Poznámka: V případě obdélníku s obvodem 14 j v úloze 4) existuje ještě obdélník velikosti 1 x 6, ten lze však umístit až na geoboard o rozměrech alespoň 7 x 7 kolíčků.

Na obr. 1.5 je zachyceno řešení úloh z bodu 5).



Obr. 1.5: Řešení úloh z bodu 5)

Shrnutí zkušeností z první vyučovací hodiny:

- Pomůcka žáky velmi zaujala
- Někteří žáci měli problémy s určením délek stran – bylo potřeba zdůraznit, že to není počet kolíčků na příslušné straně, ale vzdálenost mezi krajními kolíčky

- Žáci pracovali se zájmem. Většinou nepočítali, ale zkoušeli řešit jednotlivé úkoly přemisťováním gumiček tak dlouho, dokud jim úloha nevyšla

1.4 Druhá vyučovací hodina

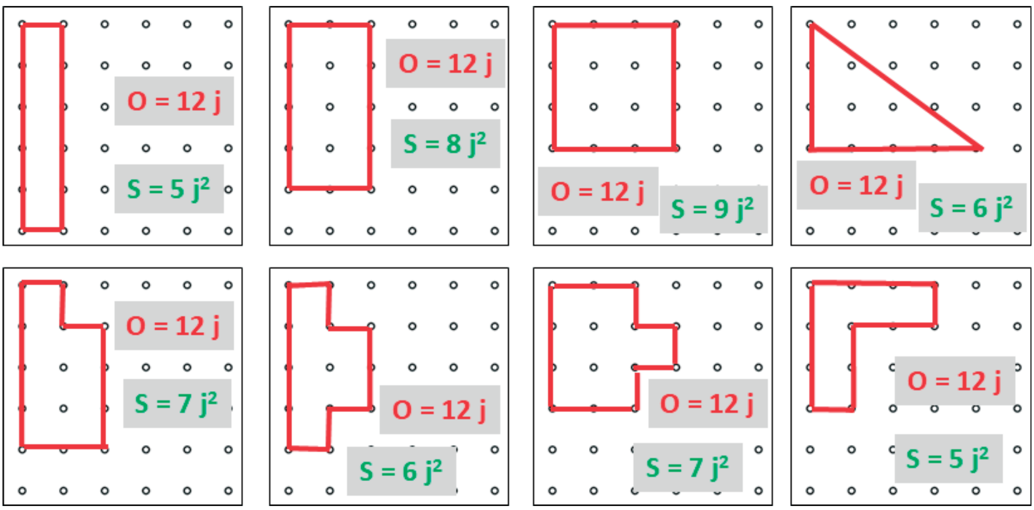
1) Pokračování práce s pomůckou geoboard. Pro systematický záznam řešení úloh je vhodné žákům připravit listy papíru s bodovou čtvercovou sítí. Do těchto listů mohou rychlejší žáci případně zaznamenávat i řešení, která se na geoboard nevejdou.

2) Obvod obrazce je 12 jednotek. Vymodeluj všechna řešení.
   a) Mají tyto obrazce také shodné obsahy?
   b) Lze vymodelovat jiný obrazec než čtverec nebo obdélník, který bude také mít obvod 12 jednotek?

3) Obsah obrazce je 12 j^2. Vymodeluj všechna řešení.
a) Mají tyto obrazce také shodné obvody?
b) Lze vymodelovat jiný obrazec než čtverec nebo obdélník, který bude také mít obsah 12 j^2?

4) Vymodeluj obrazec, který má číselně stejný obvod i obsah.

Na obr. 1.6 jsou uvedena řešení úloh z bodu 2).

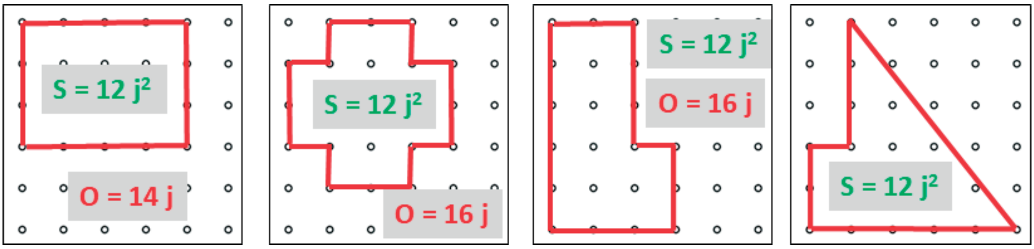


Obr. 1.6: Řešení úloh z bodu 2) v druhé hodině

Řešení úloh uvedených v bodu 2):
a) Obrazce mají různé obsahy.
b) Ano, například pythagorejský trojúhelník (obr. 1.6 vpravo nahoře) nebo různé pravoúhlé mnohoúhelníky vzniklé „prolamováním rohů“ ze čtverce či obdélníků (dolní řada na obr. 1.6).

Poznámka: K úloze v části 2b) existuje více než 20 řešení. Jejich kompletní soupis a další podobné úlohy nabízí příspěvek (Samková, 2017). Pokud žáci neznají pythagorejský trojúhelník, je v úloze 2a) největším možným obsahem obrazce 9 j² a nejmenším možným obsahem obrazce je 5 j². Pokud žáci pythagorejský trojúhelník znají, je také možno „prolamovat rohy" z tohoto trojúhelníku – v takovém případě získáme i obrazce s obsahy 4 j² a 3 j². Řešení je podrobně diskutováno v příspěvku (Samková, 2017).

Na obr. 1.7 jsou uvedena řešení úloh z bodu 3).



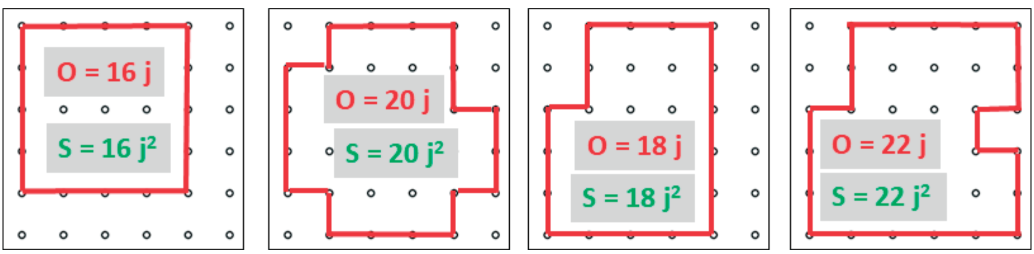
Obr. 1.7: Řešení úloh z bodu 3) v druhé hodině

Řešení úloh uvedených v bodu 3):

a) Obrazce mají různé obvody.

b) Ano, například obrazce vzniklé sjednocením obdélníků, čtverců a trojúhelníků (obr. 1.7, druhý, třetí a čtvrtý obrazec zleva). Některé z obrazců nemají celočíselný obvod (např. čtvrtý obrazec zleva). Pravoúhlý trojúhelník o obsahu 12 j² se na geoboard o velikosti 6 x 6 kolíčků nevejde. Ten s nejkratší delší odvěsnou by měl odvěsny o velikosti 4 j a 6 j, takže by pro něj byl potřeba geoboard o rozměrech alespoň 7 x 7 kolíčků. Čtverec o straně √12 j na geoboardu sestrojit nelze. Některé strany, jejichž velikost je dána odmocninou, lze na geoboardu znázornit, ale na geoboardu o velikosti 6 x 6 kolíčků se jedná pouze o strany o velikosti √2, √5, √8, √10, √13, √17, √18, √20, √26, √29, √32, √34, √41 a √50 jednotek.

Na obr. 1.8 jsou uvedena řešení úlohy z bodu 4).



Obr. 1.8: Řešení úloh z bodu 4) v druhé hodině

Jediný čtverec s číselně stejným obsahem a obvodem má rozměry 4 x 4 (viz první obrazec zleva na obr. 1.8). Nejmenší obdélník s číselně stejným obsahem a obvodem má rozměry 6 x 3, takže na náš geoboard se nevejde. Další obrazce můžeme získat „prolamováním rohů" z různých čtverců a obdélníků (např. druhý a třetí obrazec zleva na obr. 1.8). Využíváme toho, že „prolamování rohů" nemění obvod, ale zmenšuje obsah. Podobně lze využít i „prolamování dvojrohů" (např. čtvrtý obrazec zleva na obr. 1.8), které zvětšuje obvod a zmenšuje obsah.

Shrnutí zkušeností z druhé vyučovací hodiny:

- Je možné použít i se staršími žáky jako opakovací hodinu.
- Na druhé hodině již většina žáků zvládala práci geoboardem poměrně rychle. Zaměřili jsme se proto na více možností řešení a na kontrolu řešení klasickým výpočtem.

1.5 Závěr

Předchozí text nabízí náhled na možné využití výukové pomůcky geoboard v geometrii na základní škole. Úlohy, které se s pomůckou ve třídách realizovaly, je možné zařadit mezi tzv. badatelské či otevřené úlohy (Samková a kol., 2015) – jsou to úlohy prakticky založené, často s více možnými postupy řešení a více správnými řešeními. Počty řešení takových úloh často závisí na aktuálních znalostech žáků. A tak část uvedených výukových materiálů, zúženou pouze na obsah čtverce a obdélníka, je možné využít i s mladšími žáky (Klhůfková, 2016; Cachová a kol., 2015), část rozšířenou o Pythagorovu větu a odmocniny je možné využít i se staršími žáky (Žilková, 2010), například v rámci vyučovací hodiny na téma Pythagorovy věty, nebo opakovací hodiny na téma délka úsečky, obvod, obsah. V rozšířené variantě pro starší žáky mají některé úlohy více řešení než v původní variantě, tato řešení jsou v poznámkách také stručně okomentována. Perspektivu napříč ročníky nabízí příspěvek (Samková, 2017), který řeší velice podobně zadané matematické úlohy, jen jako výukovou pomůcku nevyužívá geoboard, nýbrž sadu párátek.

1.6 Literatura

GeoGebra (2019). Dostupné z: http://www.geogebra.org/

Klhůfková, K. *Netradiční motivační prostředí v primární matematice – práce s geodeskou*. Diplomová práce. Univerzita Palackého v Olomouci. Olomouc, UPO 2017 http://theses.cz/id/wke38z/Diplomov_prce_-_Kate_ina_Klh_fkov.pdf

Mezinárodní šetření TALIS 2013. Cachová, J., Coufalová, J., Hošpesová, A., Krátká, M., Vondrová, N. Praha: ČŠI 2015. http://www.csicr.cz/Prave-menu/Mezinarodni-setreni/TALIS

Samková, Libuše. Badatelské úlohy ve vyučování matematice. In: Sborník 8. konference *Užití počítačů ve výuce matematiky.* České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2017. str. 116-131. ISBN 978-80-7394-677-7. http://home.pf.jcu.cz/~upvm/2017/wp-content/uploads/2018/02/Sbornik_UPVM_2017.pdf

SAMKOVÁ, Libuše, Alena HOŠPESOVÁ, Filip ROUBÍČEK a Marie TICHÁ. Badatelsky orientované vyučování matematice. *Scientia in educatione*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2015, 6(1), 91-122 [cit. 2019-10-09]. ISSN 1804-7106. Dostupné z: http://www.scied.cz/index.php/scied/issue/view/14

Žilková, K. Geometrické modelovanie s geodoskou. In: *Konštruktivizmus vo vyučovaní matematiky a budovanie geometrických predstáv.* Nitra, UKF Nitra 2010. str. 31-38. http://www.km.fpv.ukf.sk/upload_publikacie/20110629_93229__1.pdf

Summary

The text introduces a plan of two mathematics lessons focusing on metrical attributes of triangles and rectangles and figures composed of them, emphasized via an educational tool called geoboard. It shows assignments and samples of correct solutions, accompanied by comments useful for a teacher who considers to use the materials on their teaching. The metrical attributes in focus are area and circumference, while the topic of circumference is differentiated with respect to actual knowledge of students (whether they know or do not know the Pythagorean theorem).

The learning materials were initially prepared for 11 to 12 year old students (the part without the Pythagorean theorem), however older students might use them as motivational material on the Pythagorean theorem, or as a revision material on circumferences and areas. The more general focus of the material is directed towards solving problems with multiple solutions and problems with multiple solution methods as well as existential problems. The material supports manipulative activities, connects school mathematics to everyday contexts, helps to strengthen interdisciplinarity.

The list of classroom activities is accompanied by links to other learning materials dealing with the same of similar topics.

The two mathematics lessons could be preceded by two technical education lessons where students might make their own specimens of the tool.

2. Povrch a objem válce a kužele

Naďa Vondrová, Štěpánka Kaňková

Abstrakt:
Kapitola obsahuje návrh, jak lze podnětným způsobem zavést vztahy pro povrch a objem válce a kužele. Míra v geometrii patří mezi kritická místa matematiky, přičemž její dobré pochopení je nezbytné nejen pro další studium, ale i pro praktický život. Předložené náměty jsou založeny na vlastním zkoumání žáků prostřednictvím úkolů a úloh. V kapitole jsou popsány úkoly, které tvoří na sebe navazující sérii zařazenou vždy do tří vyučovacích hodin a vedou k odhalení zkoumaných vztahů. U každého z nich jsou podány komentáře vzešlé z výuky s jednou třídou žáků sekundy šestiletého gymnázia. Postup je však použitelný i na základní škole. Kapitola se zaměřuje na proces objevu vztahů pro objem a povrch obou těles, stranou zůstávají úlohy potřebné k upevnění poznatků. Vycházíme z toho, že tyto úlohy jsou součástí běžně používaných učebnic. Teoretické zdůvodnění předloženého popisu výuky lze najít v knize Vondrová et al. (2015) či Janda a Vondrová (2019).

Klíčová slova:
míra v geometrii, povrch, objem, válec, kužel

Abstract:
The chapter consists of a proposal of a motivating way of introducing relationships for the surface area and volume of a cylinder and a cone. Measure in geometry belongs to critical places in mathematics, however, its good understanding is necessary not only for further study but for everyday life, too. The suggested procedures are based on pupils' own experimenting via tasks and problems. The chapter includes the description of tasks which make a related sequence within three lessons and which lead to the discovery of the relationships in question. Each task is augmented with comments originating from a teaching experiment with one class of the second grade from a six-year secondary grammar school. The procedure can also be used in a primary school. The chapter focuses on the process of discovery of relationships for the volume and surface area of the two solids, leaving aside tasks necessary for the consolidation of knowledge. We suppose that such tasks are available in commonly used mathematics textbooks. The theoretical justification of the described teaching procedure can be found in the book Vondrová et al. (2015) or Janda and Vondrová (2019).

Keywords:
measure in geometry, surface area, volume, cylinder, cone

2.1 Povrch a objem válce

Ročník: sekunda šestiletého gymnázia (9. ročník ZŠ)

Cíl: Žáci vyvodí způsob výpočtu povrchu a objemu válce. Porozumí jeho podstatě a budou schopni ho zapsat pomocí algebraického vzorce. Žáci načrtnou válec ve volném rovnoběžném promítání a narýsují jeho síť.

Rozsah: tři vyučovací hodiny

Žáci již znají pojmy hranol a jehlan, podstava, výška a síť hranolu a jehlanu, kruh, kružnice, obvod a obsah kruhu. Umějí vypočítat s porozuměním objem a povrch hranolů a jehlanů různých tvarů. Žáci nacházejí různé typy hranolů a jehlanů okolo sebe a využívají poznatků z hodin matematiky v reálném světě. Totéž se týká výpočtu obvodu a obsahu kruhu.

Při realizaci níže uvedených tří vyučovacích hodin bylo ve třídě 25 až 27 žáků. Žáci pracovali ve dvojicích (při lichém počtu žáků byla jedna trojice) a řešili úkoly, které postupně dostávali vytištěné na papíře (hodina 1) či najednou na jednom listu (hodina 3). Po splnění předchozího úkolu dostali další. Učitelka chodila mezi skupinami, sledovala, jak pracují, a podle potřeby odpovídala na otázky s tím, že se snažila do objevitelského procesu žáků příliš nezasahovat.

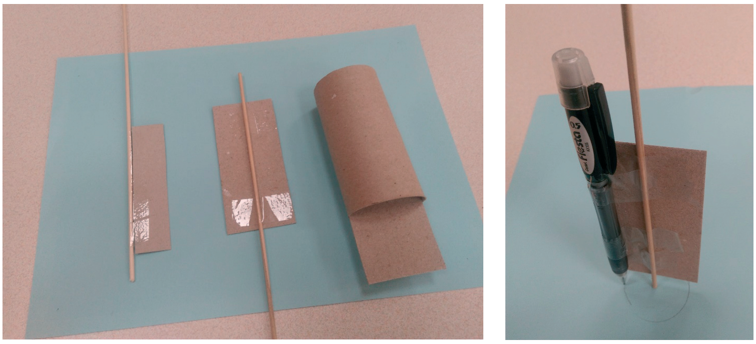
2.1.1 Hodina 1: Obleč válec

Učitelka ve spolupráci s žáky předem připravila různé předměty válcového tvaru (krabičky, plechovky, hrnky apod.), nůžky, pravítko, kružítko, drátěný model válce, papíry, čtvrtky, izolepu, lepidlo, tužky, špejle, různě velké obdélníky (a čtverec) z tvrdého papíru.

Cílem prvního úkolu je, aby si žáci jednak uvědomili, jak vzniká rotační válec, a jednak to, že převrátí-li vystřižený obdélník, který se pak otáčí kolem druhé své strany, nevznikne válec o **stejném objemu.**

Úkol 1: Přilepte vystřižený obdélník ke špejli a rotací vymodelujte válec. Pak k jedné straně obdélníka přilepte špejli a ke druhé obyčejnou tužku. Tužkou zakreslete na papír tvar podstavy válce.

Tento úkol nečinil žákům žádné problémy (viz obr. 2.1).



Obr. 2.1: Modelování rotačního válce a jeho podstavy

Otázka 1a: Když k pokusu použijete zbývající dvě rovnoběžné strany obdélníka, dostanete stejný válec?

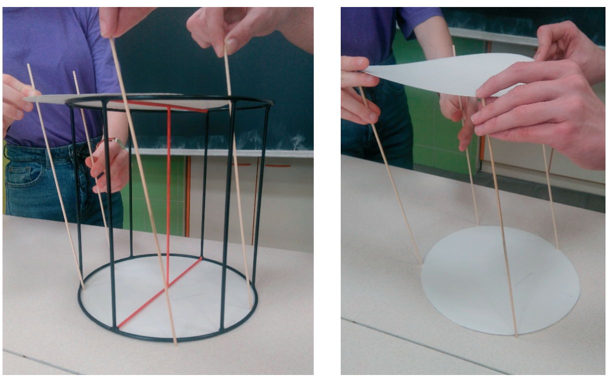
Žáci správně poznali, že v tom případě nepůjde o stejné válce, protože se budou lišit ve velikosti podstavy a výšce. Někteří se ptali, zda budou mít oba válce stejný objem; dostali příslib, že na tuto otázku si odpovíme později (což se stalo ve 4. hodině při upevňování poznatků).

Otázka 1b: Jaké rozměry musí mít obdélník, aby vymodelované válce byly stejné, i když vyměníme stranu, kolem které otáčíme?

Žáci sami přišli na to, že to musí být čtverec.

Otázka 1c: Proč válci říkáme rotační? Existují ještě nějaké jiné?

Nejdříve muselo být vysvětleno slovo rotace (otáčení). Následně přišli žáci sami na vysvětlení, proč je válec rotační. Žáky nenapadlo, že existují i jiné válce než rotační. Učitelka je na to musela navést, ale nakonec sami uvedli příklady kosých válců i válců, jejichž podstavou není kruh, které znali ze svého okolí (například – zábradlí, drbátko pro kočky, váza apod.). Kosý válec si na popud učitelky vymodelovali pomocí dvou shodných kruhů a špejlí (viz obr. 2.2).



Obr. 2.2: Modelování kosého válce

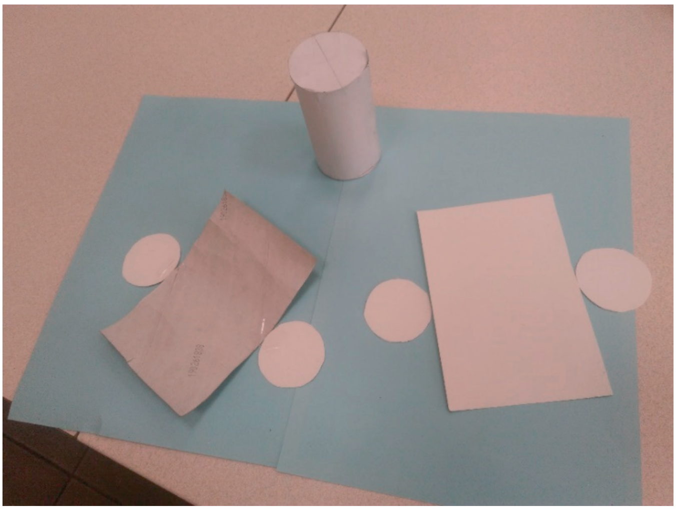
Otázka 1d: Vystřihněte z tvrdého papíru obdélník, jehož rotací vznikne válec tvaru roličky od WC papíru.

Někteří studenti vystřihli osový řez válce, jiní jeho polovinu. Na popud učitelky si vysvětlili rozdíly mezi jejich volbou (válec vznikne rotací o 180^{o}, resp. 360^{o}).

Cílem druhého úkolu bylo, aby žáci sami získali vhled do toho, jak vypadá síť válce. Úkol byl záměrně formulován nepřesně, protože žáci měli sami přijít na to, že pláštěm válce je obdélník a sítí tento obdélník a dva kruhy.

Úkol 2: Vystřihněte z papíru „obleček“ přesně na míru pro válec v samostatných „dílech“.

Původní myšlenka byla, že každý žák bude oblékat jiný válec a svou práci si pak porovnají. Z časových důvodů však každá dvojice/trojice „oblékala“ jen jeden válec – ruličku od WC papíru (viz obr. 2.3). Žáci zpravidla jednoduše obkreslili podstavu a nakreslili si obdélník o různé šířce. Tu pak upravili zastřihnutím, zahnutím nebo slepením přes sebe.



Obr. 2.3: „Oblékání“ válce

Cílem třetího úkolu bylo, aby žáci pomocí vlastní experimentální činnosti přišli na klíčový poznatek – souvislost mezi obvodem kruhu podstavy a délkou delší strany obdélníku (pláště).

Úkol 3: Otáčejte jedním kruhem (podstavou) tak, abyste porovnali jeho obvod a délku delší strany obdélníku.

Většina skupin kruhem „nekutálela“ (viz obr. 2.4), ale prostě složila „obleček“ a viděla, že velikost strany obdélníku odpovídá délce kružnice. Někteří žáci na to přišli zcela sami (někteří to věděli předem), jiní potřebovali pomoc učitelky.

Obr. 2.4: Zjišťování souvislosti mezi obvodem kruhu a jedním rozměrem pláště

Úkol 4: Načrtněte (narýsujte) síť válce do sešitu. Můžete si nalepit síť vytvořenou v předchozím úkolu.

Většina žáků doslova oblepila ruličku od WC papíru, tedy netvořila samostatný válec, takže se síť jejich válce nedala nalepit do sešitu. Museli ji tudíž vytvořit znovu, nebo síť do sešitu narýsovat. Někteří tento úkol v dané hodině nestihli a dostali jeho doplnění za domácí úkol.

Cílem dalšího úkolu bylo nechat žáky, aby sami vymysleli myšlenku výpočtu s naměřenými rozměry. Zobecnění do podoby vzorce pro výpočet povrchu válce bylo plánováno společné s učitelkou.

Úkol 5: Odvoďte, jak budeme zjišťovat povrch válce.

Žáci na základě výsledků předchozích úkolů zjistili, že povrchem válce bude součet obsahu pláště (obdélník) a obou podstav (kruhy), i když čas na přesné zavedení těchto pojmů byl až v následující hodině.

Vzorec byl s pomocí vyučující v závěru hodiny odvozen nejprve v podobě $S = 2\pi r^2 + 2\pi r v$ a následně po vytknutí v podobě $S = 2\pi r(r + v)$, kde ‚r´ je poloměr podstavy válce a ‚v´ je výška válce. První podoba vzorce má tu výhodu, že je z ní dobře vidět, jak vznikl a jak se povrch válce zjišťuje – úkoly zadané v hodině k této podobě vzorce přímo vedly a náš předpoklad byl, že žáci díky tomu nebudou vzorec uchopovat jen pamětně (protože do něj mají patřičný vhled). U druhého vzorce je proces jeho vzniku skryt a je zde nebezpečí, že se ho žáci budou učit nazpaměť.

Experimentální práce žáků byla narušována tím, že někteří matematicky zdatnější žáci sice okamžitě věděli, jaký bude výsledek, měli ovšem problém s vlastní realizací (tvorbou fyzického modelu). Naštěstí byli na žádost učitelky disciplinovaní, zachovali mlčenlivost a nechali ostatní objevovat. Na závěr ještě dodáme, že je možné, že ve třídě základní školy by žáci ještě před abstraktním vzorcem potřebovali mezistupeň v podobě konkrétního číselného výpočtu.

2.1.2 Hodina 2: Upevňování poznatků

V této hodině žáci rýsovali sítě válců, načrtávali válce ve volném rovnoběžném promítání a vyznačovali jejich rozměry. Také byly zavedeny pojmy výška, poloměr, průměr, strana a osový řez válce. Žáci řešili jednoduché úlohy na výpočet povrchu válce.

2.1.3 Hodina 3: Naplň válec

Učitelka ve spolupráci s žáky připravila odměrné válce různého tvaru a objemu (viz obr. 2.5), nádoby válcového tvaru, vodu (a utěrky), špejle, izolepy, obyčejné tužky, pravítka a kružítka, ruličky od WC papíru (možno nahradit papírovými válci) a drátěný model válce.

Vzhledem k náročnosti úkolů co do praktické realizovatelnosti (práce s vodou), byla tato hodina původně plánována na cvičení z matematiky, tedy na půlenou hodinu matematiky, které jsou na gymnáziu, kde byla výuka realizována, jednou týdně. Bohužel z organizačních důvodů to nebylo možné, proto byla výuka operativně modifikována pro celou třídu.

Cílem prvního úkolu bylo, aby žáci pomocí praktické činnosti zjistili vztah mezi výškou a poloměrem podstavy válce při stejném objemu.

Úkol 1: Naberte do odměrného válce 100 ml vody a přelejte toto množství do jiného válce. Jak se mění výška hladiny? Najdete souvislost?

Jedna dvojice žáků předem připravila do odměrných válců a kádinek 100 ml vody, zatímco ostatní žáci pracovali na úkolech 2 až 6. Následně žáci ve třídě sami, bez pomoci učitelky, na základě připravených odměrných válců a kádinek objevili vztah mezi výškou a poloměrem podstavy válce při stejném objemu.

Obr. 2.5: Odměrné válce na experimentování

Cílem druhé úkolu bylo, aby žáci prakticky zjistili, jak mohou najít objem nádoby pomocí odměrných válců, a aby zjistili objem válce, který u pozdějšího úkolu počítali podle odvozeného vzorce.

Úkol 2: Vyberte vhodný odměrný válec, pomocí kterého změříte objem dané plechovky. Který válec jste vybrali a proč? Který je naopak nevhodný a proč?

Při měření objemu plechovek se vystřídalo asi sedm dvojic, naštěstí více žáků zájem o přelévání vody nemělo (to by se již v hodině nestihlo). U umyvadla byly vždy přítomny nejvýše dvě dvojice najednou, ostatní dvojice pracovaly na úkolech 3 až 6. Zajímavé bylo sledovat, že první dvojice nalévaly z kohoutku vodu do kádinek a odměrných válců a přelévaly ji do plechovky (obr. 2.6 vlevo). Potom jedna dvojice zvolila opačný postup – žáci nalili vodu do plechovky a přelévali ji do odměrných válců (obr. 2.6 vpravo). Tento postup zopakovaly i následující dvojice. Při závěrečné diskusi vyhodnotili žáci druhý postup jako snadnější a méně pracný. Výsledky měření žáci zapisovali na odvrácenou část tabule tak, aby to ostatní neviděli i s jednotkami (ml).

Další úkoly již plnily dvojice žáků průběžně v lavici s tím, že zájemci se střídali u plnění úkolu 2 u umyvadla.

Cílem třetího úkolu bylo, aby si žáci uvědomili, jaký vztah má výška válce k objemu a povrchu válce.

Obr. 2.6: Měření objemu plechovky přeléváním vody

Úkol 3: Vezměte roličku od WC papíru a papírové modely válce a rozstříhejte je příčně na 4 stejné válce. Kolikrát větší objem měl původní válec oproti získaným menším válcům? A jak je tomu u povrchu?

Úkol se žákům podařilo splnit. Uvědomili si, že zatímco objem původního válce je 4krát větší, pro povrch to neplatí, a to kvůli podstavám. Zjistili také, že pokud bychom uvažovali jen obsah pláště, ten je také čtyřnásobný.

Cílem dalšího úkolu bylo odvodit, jak vypočítat objem válce. Cíleně při tom byla navozena představa hranolu a jeho objemu (tedy „obsah podstavy krát výška“: $V = Sp \cdot v$).

Úkol 4: Připomeňte si hranoly, jak jsme počítali jejich objem? A jak to bude u válce? Představte si kvádr, pravidelný šestiboký hranol, resp. osmiboký, dvanáctiboký, čtyřiadvacíti boký a až „hodně“ boký hranol. Co když bude mít podstava hranolu tolik hran, že se hranol tvarem přiblíží válci?

Vymyšlení toho, jak se počítá objem válce, zvládli všichni žáci. Opět došlo k tomu, že někteří vzorec již znali (ve třídě je několik žáků, kteří se pravidelně připravují na matematickou olympiádu či sledují videa typu Khanova matematika), jiní ho na místě vymysleli a jen jedné dvojici bylo nutné pomoci (vyvoláním představy hranolů, jejichž podstavy jsou pravidelné *n*-úhelníky). Ukázalo se, že žáci měli dobrou představu objemu hranolů, která se u tohoto úkolu zúročila.

Následující úkol navazoval na předchozí s tím, že žáci měli způsob výpočtu objemu válce verbalizovat.

Úkol 5: Pokuste se svými slovy popsat, jak byste počítali objem válce. Společně odvodíme i vzorec, který tento postup popisuje.

Ani zde nebyla pomoc vyučující nutná, algebraické vyjádření vzorce ve tvaru $V = \pi r^2 v$, kde ‚*r*´ je poloměr podstavy válce a ‚*v*´ je výška válce, zvládli žáci sami. Matematicky zdatnější žáci ostatním vysvětlili, jak ke vzorci došli.

Cílem posledního úkolu bylo na konkrétním výpočtu zjistit, do jaké míry žáci výpočet objemu válce uchopili. Současně tento úkol odkazuje i na úkol 2 – žákům se ukáže souvislost mezi zjišťováním objemu v litrech a v krychlových jednotkách.

Úkol 6: Změřte plechovku z 2. úkolu a vypočtěte její objem.

Žáci měli k dispozici dva druhy různě velkých plechovek od kompotu. Výsledky výpočtů žáci zaznamenali na odvrácenou část tabule i s jednotkami (cm^3).

Třída společně s učitelkou nejprve zhodnotila výsledky výpočtů objemů plechovek na tabuli. Žáci se domluvili na stejných jednotkách (při přelévání uváděli žáci výsledky v ml a u měření a výpočtu v cm^3). Výsledky byly rozmanité. U velké plechovky (o objemu cca 850 ml) se objevily výsledky cca od 690 do 990 ml. U malé plechovky (o objemu cca 450 ml) se výsledky pohybovaly cca od 350 do 600 ml. Třída se shodla, že jde o nepřesnosti, které způsobil „lidský faktor“ a že je třeba dávat si při měření velký pozor (například, až budou někdy počítat, jak velký sud na dešťovou vodu nebo zahradní bazén budou potřebovat).

V následujících hodinách žáci řešili rozmanité úlohy na povrch a objem válce.

2.2 Povrch a objem kužele

Ročník: sekunda šestiletého gymnázia (9. ročník ZŠ)

Cíl: Podobně jako u válce žáci vyvodí způsob výpočtu povrchu a objemu kužele. Porozumí jeho podstatě a budou schopni ho zapsat pomocí algebraického vzorce. Žáci načrtnou kužel ve volném rovnoběžném promítání a jeho síť.

Rozsah: tři vyučovací hodiny

Žáci již znají výpočet obsahu kruhu a kruhové výseče a délky kružnice, povrchu a objemu hranolů, válce a jehlanů a Pythagorovu větu. Úkoly navazují na předchozí téma Povrch a objem válce.

Podobně jako u hodin týkajících se válce při realizaci níže uvedených tří vyučovacích hodin bylo ve třídě 25 až 27 žáků. Žáci pracovali ve dvojicích (při lichém počtu žáků byla jedna trojice) a postupně řešili úkoly, které jim učitel (povrch a objem kužele učil student pedagogické fakulty v rámci své praxe) postupně zobrazoval na powerpointové prezentaci. Možná to byl důvod, proč se oproti předchozímu tématu (válec) lépe dařilo dělat postupná shrnutí závěrů z jednotlivých úkolů. Na druhé straně se ukázalo, že kvůli tomuto postupu bylo třeba práci některých skupin urychlovat (rychlejší skupiny pomáhaly těm pomalejším).

2.2.1 Hodina 1: Obleč kužel

Učitel (kterým byl v tomto případě student učitelství, který na škole právě konal praxi) ve spolupráci s žáky předem připravil nůžky, pravítko, kružítko, papíry, čtvrtky, izolepu, lepidlo, tužky, špejle, tvrdý papír, plechovky různého objemu a různé modely kuželů.

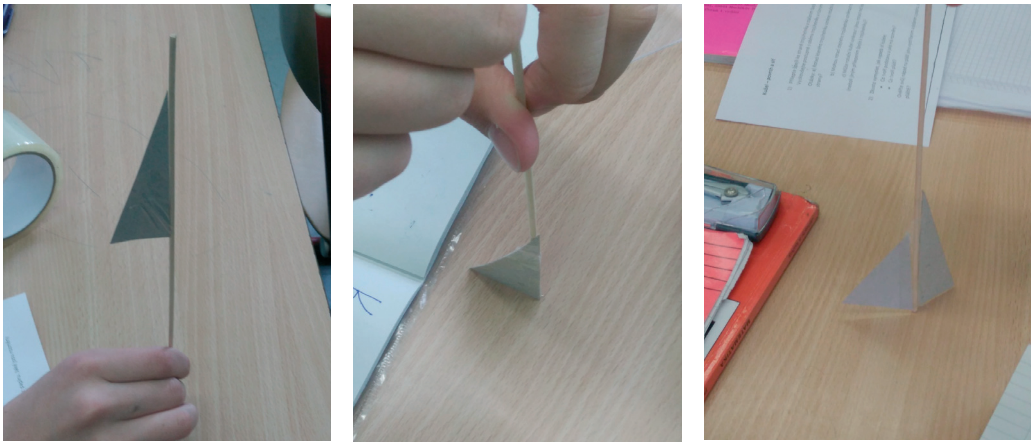
Cílem prvního úkolu bylo, aby si žáci uvědomili, jak vznikne kužel jako rotační těleso. Podobně jako u válce mají zkoumat, jak ovlivňuje trojúhelník, který rotuje kolem osy, velikost objemu.

Úkol 1: Přilepte špejli ke straně vystřiženého trojúhelníka a otáčením špejle zkuste vymodelovat kužel. Vyzkoušejte postupně se dvěma trojúhelníky a rotujte kolem různých stran trojúhelníka.

1a) Rotací kterého trojúhelníku vznikne rotační kužel? Rotací kolem které strany?
1b) Mohou rotací stejného trojúhelníku vzniknout různé kužely?
1c) Může rotační kužel vzniknout i jinou rotací než kolem strany trojúhelníka (neboli jiným přilepením špejle k trojúhelníku)?

Každá dvojice žáků dostala několik předem připravených trojúhelníků (pravoúhlé, ostroúhlé a pravoúhlé) a špejle. Další pomůcky měli většinou vlastní.

Žáci neměli s úkolem vesměs potíže, protože jsme přímo navazovali na práci s rotačním válcem. Obr. 2.7 ilustruje jejich práci. Zajímavá situace nastala u jedné skupiny, která se snažila zjednodušit si práci. Žáci použili oba trojúhelníky naráz (obr. 2.7 vpravo).



Obr. 2.7: Modelování rotačního kužele

Žáci vyloučili ostroúhlý trojúhelník, z něho rotační kužel nevznikne (úkol 1a). Po zkušenosti s válcem žáci nezaváhali a zvolili pravoúhlý trojúhelník a jednu z jeho odvěsen jako odpověď pro úkol 1b. Následně odhadli, že použitím druhé odvěsny vznikne jiný kužel a použitím přepony kužel nevznikne. U úkolu 1c žáci nejprve navrhli rovnostranný trojúhelník, následně odhalili i rovnoramenný. Většině bylo jasné, že půjde o rotaci o 180°.

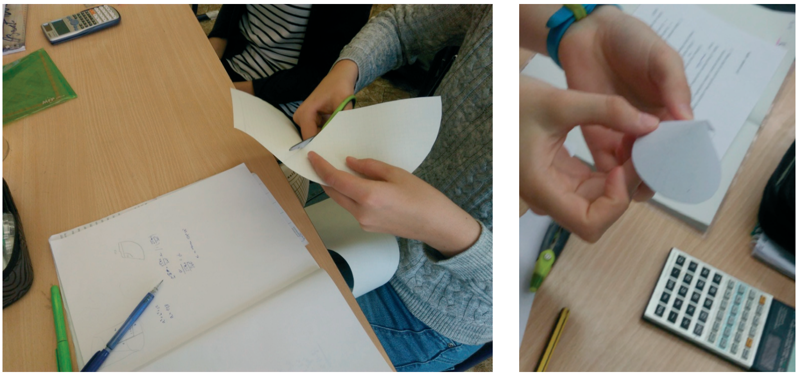
Cílem druhého a třetího úkolu bylo, aby žáci sami zjistili, jak vypadá síť kužele.

Úkol 2: Zkuste vymyslet, jak vypadá síť kužele. Co tvoří jeho podstavu a jaké má rozměry? Co tvoří plášť?

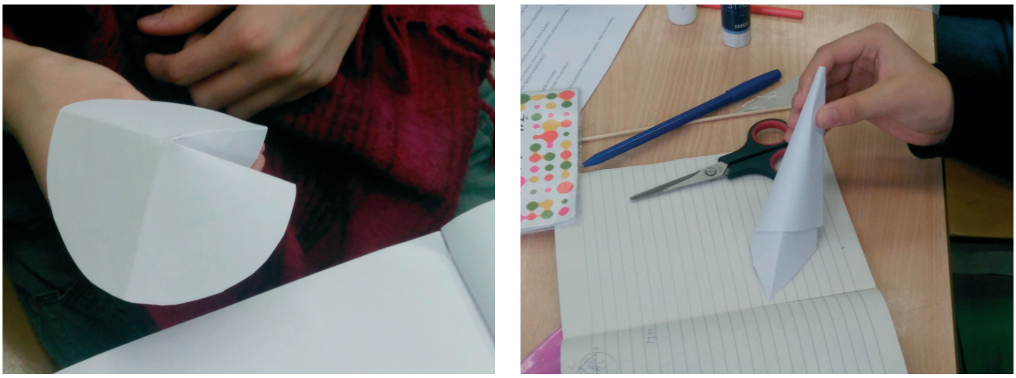
Jedním z prvních tipů na plášť, který žáci navrhli, byl trojúhelník. Poměrně rychle však zjistili, že tomu tak není. Původní představu následně upravili na kruhovou výseč. Chvíli trvalo, než většina dvojic přišla na to, že nemohou volit libovolnou podstavu, ale je nutné velikost kruhu přizpůsobit kruhové výseči tvořící plášť.

Úkol 3: Ověřte svůj nápad na plášť jeho vystřižením a složením z papíru. Jaké jsou rozměry pláště?

Práci žáků ilustruje obr. 2.8. Vznikaly však i nesprávné modely (obr. 2.9). Někteří žáci měli tendenci vyznačovat na tělese hrany.

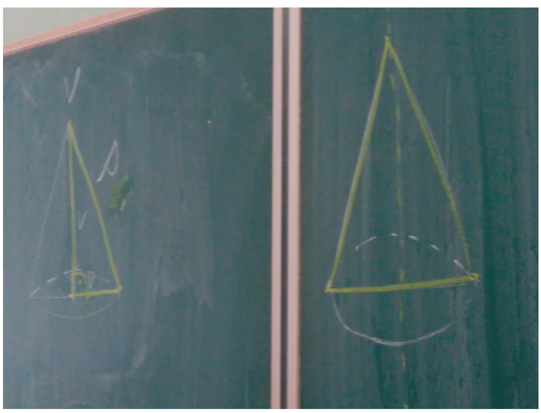


Obr. 2.8: Hledání pláště kužele



Obr. 2.9: Obtíže při modelování pláště kužele

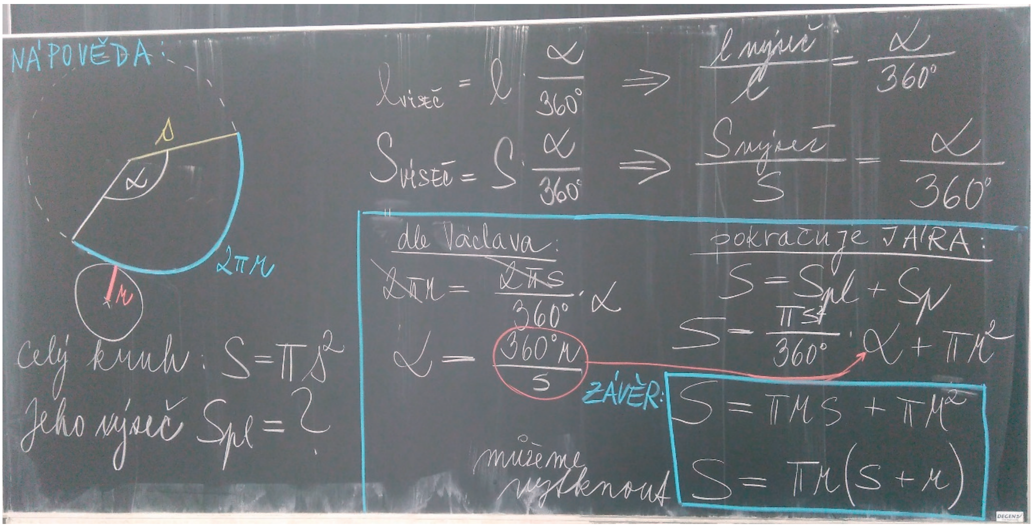
Získané poznatky třída spolu s učitelem shrnula na tabuli (obr. 2.10). Na nákresu byla vyznačena strana kužele, poloměr, výška a osový řez. Žáci si kužel zakreslili do sešitů a zapsali si nové pojmy.



Obr. 2.10: Nákres kužele na tabuli s vyznačením význačných prvků

Úkol 4: Zjistěte, jak se bude počítat povrch kužele.

Ukázalo se, že odvození výpočtu obsahu pláště (tedy Spl = πrs) bylo pro většinu žáků sekundy příliš obtížné. Velký podíl při odvozování vzorce měli dva nejzdatnější matematici ve třídě, kteří následně ostatním vysvětlili, jak to udělali. Nápovědu na tabuli psala a kreslila učitelka, odvození psali žáci. Na obr. 2.11 je rekonstrukce celého procesu pořízená až následně (práce žáků nebyla bohužel vyfotografována).



Obr. 2.11: Zápis odvození obsahu kruhové výseče (pláště kužele) a vzorce pro povrch kužele

Domníváme se, že i přesto, že samostatné odvození vzorce bylo pro většinu žáků příliš obtížné, má smysl se o toto odvození pokoušet. Tento proces totiž posiluje dojem, že vzorce v matematice mají své zdůvodnění a vyplývají z dalších matematických poznatků.

Zatímco povrch válce byl odvozen žáky celkem bez problémů, u povrchu válce byla situace obtížnější. Jedním z důvodů by mohla být větší matematická náročnost u jehlanu. Bylo nutné pracovat ještě se vztahy pro kruhovou výseč, uvědomit si, že ‚s' je vlastně také poloměr kruhu, kombinovat vzorce dohromady apod. Z hlediska didaktického došlo ke změně způsobu práce, kdy hrál větší roli učitel a dva žáci zdatní matematici, ostatní se snažili jejich vysvětlení pochopit. Jejich podíl na objevu byl tak menší než v případě válce. Pokud by bylo možné věnovat celé problematice více času, bylo by zřejmě možné dovést k objevu více žáků.

Pátý úkol zadal učitel jen ústně. Jeho cílem bylo, aby si žáci uvědomili, jak vznikne rovnostranný kužel a jaké má vlastnosti.

Úkol 5: Vystřihněte z papíru půlkruh a slepte plášť kužele. Najděte vlastnosti takového kuželu.

Úkolem žáků bylo zjistit, že se jedná o rovnostranný kužel, kde strana se rovná průměru. Ukázalo se však, že žáci měli tendence vlastnosti rovnostranného kužele zobecňovat na libovolný kužel. Proto by bylo vhodnější tento úkol zadat až poté, kdy si žáci poznatky o kuželi více upevní.

2.2.2 Hodina 2: Upevňování poznatků

Ve druhé hodině žáci rýsovali síť kužele, což se ukázalo jako poměrně náročné. Dále načrtávali kužel ve volném rovnoběžném promítání a vyznačovali jeho rozměry. Byly zavedeny pojmy výška, poloměr, průměr, strana a osový řez kužele. Žáci využili Pythagorovu větu pro odvození vztahu mezi poloměrem, výškou a stranou kužele. Následně žáci řešili jednoduché úlohy na výpočet povrchu kužele.

2.2.3 Hodina 3: Naplň kužel

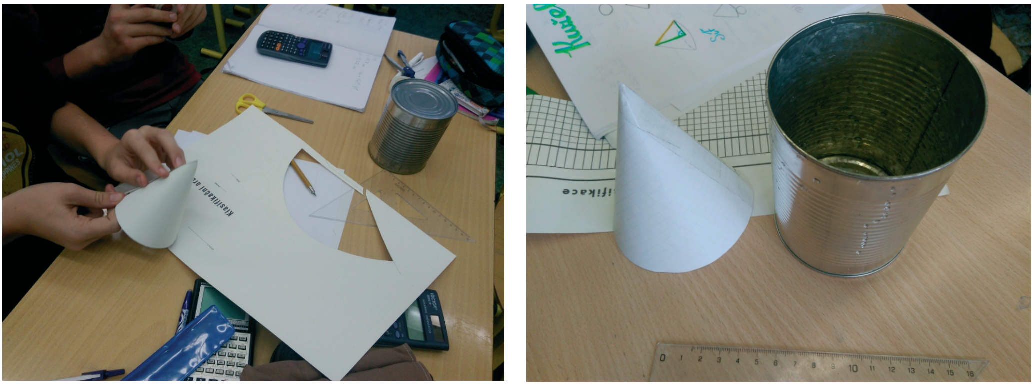
Podobně jako u válce učitelka ve spolupráci s žáky připravila pomůcky – nůžky, pravítko, kružítko, papíry, čtvrtky, izolepu, lepidlo tužky, špejle, tvrdý papír, válcové plechovky různého objemu, igelitové (mikrotenové) sáčky, různé modely kuželů.

Výuka tentokrát probíhala v půlené hodině matematiky, organizačně byla tedy jednodušší než hodina, kde se pracovalo s válcem.

Cílem prvního úkolu bylo získat vhled do vzájemného vztahu objemů mezi kuželem a válcem, které mají stejný poloměr podstavy a stejnou výšku.

Úkol 1: Vezměte plechovku od kompotu tvaru válce. Z tvrdého papíru vytvořte kužel (stačí plášť) stejné výšky a poloměru, jako má válec. Do vzniklého kornoutu vložte igelitový sáček, naplňte vodou a několikrát přelijte do plechovky. Kolik kuželů se vešlo do válce se stejnou výškou a poloměrem?

Jak již bylo řečeno, výuka probíhala ve dvou hodinách, vždy s polovinou třídy. Mezi prací první skupiny a druhé skupiny byl rozdíl. Více než polovina žáků druhé skupiny nedokázala slepit kužel. Ukázalo se tedy, že jednorázová zkušenost se sítí kužele v první hodině těmto žákům nestačila k tomu, aby si vytvořili dobrou představu. Nedokázali si obkreslit podstavu kužele a k ní vytvořit plášť, tedy dopočítat potřebné údaje a narýsovat plášť. Některé dvojice z této skupiny si musely zapůjčit kužely od úspěšnějších spolužáků. Na rozdíl od válce byl kužel pro žáky náročnější těleso na představu. Nemají s ním (a s rozvíjením tohoto tělesa do sítě) zřejmě tolik zkušeností z běžného života jako s válcem. Práci žáků ilustruje obr. 2.12.



Obr. 2.12: Příprava pomůcek pro odhalení vztahu mezi objemem kužele a příslušného válce

Na obr. 2.13 je vidět, jak žáci přelévali vodu. Žáci se zdáli vesměs aktivitou zaujati. Bylo vidět, že dokázali využít zkušenosti získané v podobně vedené hodině týkající se objemu válce.

Obr. 2.13: Zjišťování vztahu mezi objemem kužele a příslušného válce

Odhady, které žáci činili ohledně vztahu objemů obou těles, se lišily. Např. Adam odhadoval, že se voda z kužele vejde do válce dvakrát. Jakub, který s ním byl ve dvojici, nesouhlasil a myslel, že „celé dva kužely se tam nevejdou“.

Nakonec všechny skupiny došly k závěru, že výsledek je třikrát. Žáci to experimentálně vyvodili (díky výuce v půlené třídě se stačili vystřídat u umyvadla všichni) a někteří ve druhé skupině si vzpomněli na jehlany a již na začátku provedli správný odhad.

Cílem druhého úkolu bylo, aby žáci na základě odhadů a analogie s jehlanem zjistili, jak se objem kužele vypočítá, a tuto skutečnost dokázali zapsat algebraicky.

Úkol 2: Vypočítejte skutečný objem kuželu a následně odvoďte vzorec.

Pro učitelku překvapivě si více studentů druhé skupiny ještě před experimentem vybavilo jehlany a výpočet jejich objemu jako 1/3 objemu příslušného hranolu. Vzorec pro objem kužele ve druhé skupině odvodila a ostatním vysvětlila matematicky nejzdatnější dvojice. V první skupině toto vysvětlení a odvození vzorce proběhlo ve spolupráci s vyučující.

V prvním úkolu žáci zjistili, že objem kužele odpovídá 1/3 objemu válce se stejnou podstavou a výškou. Odvození vzorce $V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$ i na základě znalosti objemu jehlanu $V = \frac{1}{3} S_p v$ pak byla již maličkost.

Na závěr hodiny si žáci do sešitů načrtli kužel, vyznačili r (poloměr), s (stranu), v (výšku) a zapsali odvozený vzorec pro výpočet objemu kužele: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$.

V následujících několika hodinách proběhlo upevňování a procvičování učiva.

Teprve dodatečně nás napadlo, že by bylo vhodné spojit představu decilitru s objemem zkoumaného kužele, který byl přibližně 2 dl. Pokud by byla k dispozici sklenice na šampaňské, která má tvar kužele, mohli by žáci daný objem vidět názorně.

2.3 Závěr

Přístup k míře v geometrii, který byl v kapitole předložen na příkladu povrchu a objemu válce a kužele, vychází z toho, že pro dobré pochopení žáků je vhodné, aby na vztahy přicházeli sami na základě vlastního řešení úloh. Uchopení vztahů prostřednictvím vzorce, tedy použití jazyka algebry, představuje nejabstraktnější fázi pojmotvorného procesu míry v geometrii (Vondrová et al., 2015). Popsaný způsob by měl dát žákům možnost vytvořit si dobrou představu o tom, jak vzorce vzniknou a co znamenají, a vyhnout se tak formálnímu poznání ve smyslu teorie generických modelů (Hejný, Kuřina, 2009).

I když se ne vše v popsané výuce podařilo podle našich představ (výše navrhujeme, jak by se úkoly daly pozměnit), věříme, že předložený způsob může fungovat jako odrazový můstek pro ty z učitelů, kteří u svých žáků usilují o hlubší pochopení míře v geometrii. Inspirativní pro ně může být i popis obtíží, které se u žáků objevily.

2.4 Literatura

HEJNÝ, Milan a KUŘINA, František. Dítě, škola, matematika. Konstruktivistické přístupy k vyučování matematice. Praha: Fraus, 2009.

JANDA, David a VONDROVÁ, Naďa. Pojmotvorný proces v oblasti míry v geometrii [e-kniha]. Praha: PedF UK, 2019.

VONDROVÁ, Naďa a RENDL, Miroslav. Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků. Praha: Univerzita Karlova, nakladatelství Karolinum, 2015. ISBN 978-80-246-3234-6.

Summary

The chapter consists of a proposal of a motivating way of introducing relationships for the surface area and volume of a cylinder and a cone. Measure in geometry belongs to critical places in mathematics, however, its good understanding is necessary not only for further study but for everyday life, too. The suggested procedures are based on pupils' own experimenting via tasks and problems (for example, rotating a rectangle to make a cylinder and rotating a triangle to make a cone, making models and nets of a cylinder and a cone, filling models of solids with water to approximate their volume). The chapter includes the description of tasks which make a related sequence within three lessons and which lead to the discovery of the relationships in question. Each task is augmented with comments originating from a teaching experiment with one class of the second grade from a six-year secondary grammar school. The procedure can also be used in a primary school. The chapter focuses on the process of discovery of relationships for the volume and surface area of the two solids, leaving aside tasks necessary for the consolidation of knowledge. We suppose that such tasks are available in commonly used mathematics textbooks. The theoretical justification of the described teaching procedure can be found in the book Vondrová et al. (2015) or Janda and Vondrová (2019).

3. Pythagorova věta

Danila Bímová, Jiří Břehovský

Abstrakt:
Hlavním cílem dokumentu je nastínit možnost odvození Pythagorovy věty induktivní metodou, tj. přesněji řečeno metodou, která je založena na poznání vycházejícím z empiricky zjištěných faktů a skutečností a následně vedoucím k vyslovení obecných závěrů. Dílčími cíli materiálu jsou procvičení trojúhelníkové nerovnosti, zopakování typů trojúhelníků podle velikostí vnitřních úhlů, připomenutí terminologie spojené s pravoúhlým trojúhelníkem a určení obsahu obrazce vyznačeného ve čtvercové síti. Jako bonus k odvození Pythagorovy věty je přidán dynamický applet, v němž je užití čtverců v Pythagorově větě zobecněno na užití pravidelných rovinných obrazců. Dokument obsahuje také webové odkazy, jména autorů a stručné anotace výukových materiálů pro téma Pythagorova věta vyskytujících se v současné době na internetu.

Klíčová slova:
Pythagorova věta, trojúhelníková nerovnost, typy trojúhelníků dle vnitřních úhlů, obsah obrazce zobrazeného ve čtvercové síti, dynamické applety, GeoGebra

Abstract:
The interpretation of the Pythagorean theorem with the use of the inductive method is the main aim of the document. The inductive method means the method based on the empirically found facts and realities from which it is consequently possible to draw general conclusions. Practising of the triangular inequality, repeating of the types of triangles according to the inner angles of a triangle, and determining of an area of a shape drawn in a square net are the partial aims of this material. The dynamic applet containing the generalization of the squares used in the Pythagorean theorem into the usage of the regular planar shapes is added as a bonus to the interpretation of the Pythagorean theorem. The web links of the teaching materials concerning the Pythagorean theorem and appearing at this moment on internet are mentioned together with the names of their authors and with short annotations in this document.

Keywords:
Pythagorean theorem, triangular inequality, types of triangles according to the kinds of inner angles of a triangle, area of a shape drawn in a square net, dynamic applets, GeoGebra

3.1 Úvod

Během spolupráce oborových didaktiků Mgr. Daniely Bímové, Ph.D. a Mgr. Jiřího Břehovského, Ph.D. z Katedry matematiky a didaktiky matematiky Fakulty přírodovědně-humanitní a pedagogické Technické univerzity v Liberci s učiteli Bc. Martinem Pařízkem a Mgr. Štěpánkou Šípošovou ze ZŠ Liberecká v Jablonci nad Nisou v rámci projektu vznikl námět pro vytvoření výukového materiálu věnovaného tématu Pythagorova věta. Téma Pythagorova věta je vyučováno v 8. ročníku ZŠ a dle názoru výše uvedených vyučujících ze ZŠ Liberecká činí žákům potíže pochopení podstaty Pythagorovy věty. Za tímto účelem byl vytvořen dynamický applet v softwaru GeoGebra, v němž je názorně představen hlavní princip Pythagorovy věty a který slouží k jejímu odvození. Tento applet byl doplněn o čtyři další dynamické applety – tři applety geometrických rozcviček a jeden applet ukazující zobecnění Pythagorovy věty.

V appletu Pythagorovy věty je využito sestrojení pravoúhlého trojúhelníku zadaného délkami tří jeho stran. Za tímto účelem je vhodné na začátek hodiny zařadit geometrickou rozcvičku zaměřenou na zopakování „trojúhelníkové nerovnosti“. Takováto aktivita v podobě dynamického appletu sestrojeného v softwaru GeoGebra a její zařazení ve vyučovací hodině jsou popsány v kapitole Metodické pokyny tohoto textu.

Je obecně známo, že Pythagorova věta je platná pouze pro pravoúhlé trojúhelníky. Druhá uvedená rozcvička slouží k zopakování rozdělení trojúhelníků podle velikostí jejich vnitřních úhlů. Mezi trojúhelníky, které je třeba roztřídit, se vyskytují mimo jiné právě také pravoúhlé trojúhelníky.

Poněvadž hlavní princip Pythagorovy věty užitý ve GeoGebra appletu spočívá právě v počítání a přemisťování jednotkových čtverečků, byla do vyučovací hodiny zařazena ještě i třetí rozcvička. Úkol v této rozcvičce spočíval v určení obsahu obrazce vepsaného do čtvercové sítě. Znázorněný obrazec zjednodušeně představuje postavu dromedára. Pro vyvolání konkrétnějších přestav je do appletu vložen obrázek skutečného dromedára.

Cílem appletu je odvození Pythagorovy věty samotnými žáky na základě přemisťování jednotkových čtverečků, z nichž se skládají čtverce sestrojené nad odvěsnami pravoúhlého trojúhelníku, do čtverce sestrojeného nad přeponou téhož pravoúhlého trojúhelníku. Tři výše uvedené rozcvičky byly motivačními a přípravnými úlohami této hlavní aktivity.

Vzhledem ke skutečnosti, že jsou v jedné osmé třídě na ZŠ Liberecká tři nadaní žáci, byl ještě vytvořen také dynamický applet obsahující zobecnění Pythagorovy věty, tj. místo čtverců byly pro Pythagorovu větu použity půlkruhy, rovnostranné trojúhelníky, pravidelné pětiúhelníky a pravidelné šestiúhelníky. Zařazení tohoto appletu nakonec vyplynulo spontánně přímo ze situace v hodině. Díky tomu, že sami žáci na konci předchozí aktivity začali navrhovat jiné rovinné geometrické obrazce, které by mohly být užity místo čtverců, měli učitelé možnost s použitím tohoto appletu ukázat žákům, že jejich návrhy byly správné.

Kromě metodických pokynů popisujících práci s uvedenými dynamickými applety je do textu zařazena také kapitola věnovaná databance výukových materiálů pro téma Pythagorova věta. Do této kapitoly je zařazeno devět výukových materiálů dostupných na internetu. Jedná se o materiály různých typů. Některé materiály obsahují teoretickou část, tj. odvození Pythagorovy věty, jiné cvičení, množství aplikačních příkladů či pracovní listy na procvičování a další také např. online testování. Kapitola je zakončena přehledem publikací a příkladem geometrického softwaru, které vyučující ze ZŠ Liberecká využívají při výuce tématu Pythagorova věta.

3.2 Metodické pokyny

3.2.1 Úvodní informace

Cílová skupina: materiál je určen pro žáky 8. ročníku ZŠ, ev. pro žáky tercie osmiletého gymnázia, 13–14 let

Cíle materiálu: Hlavním cílem materiálu je odvození Pythagorovy věty induktivní metodou, tj. přesněji řečeno metodou, která je založena na poznání vycházejícím z empiricky zjištěných faktů a skutečností a následně vedoucím k vyslovení obecných závěrů. Pomocnými cíli materiálu jsou procvičení trojúhelníkové nerovnosti, zopakování typů trojúhelníků podle velikostí vnitřních úhlů a určení obsahu obrazce vyznačeného ve čtvercové síti.

Potřebný čas na aplikaci materiálu: materiál je vhodné aplikovat během jedné, max. dvou vyučovacích hodin podle schopností žáků ve třídě

3.2.2 Vyučovací hodina

3.2.2.1 První aktivita v hodině: Rozcvička – zopakování trojúhelníkové nerovnosti

- *Motivace aktivity*

Při odvození Pythagorovy věty využijeme sestrojení trojúhelníku zadaného délkami tří jeho stran. Za tímto účelem je vhodné na začátek hodiny zařadit geometrickou rozcvičku zaměřenou na zopakování „trojúhelníkové nerovnosti“. Aktivita je připravena v podobě GeoGebra dynamického appletu

- *Zadání úkolu*

Rozhodněte, zda je možné sestrojit trojúhelníky s následujícími délkami stran:

1. $\triangle ABC$: $a = 3$ cm, $b = 6$ cm, $c = 7$ cm;
2. $\triangle ABC$: $a = 4$ cm, $b = 7$ cm, $c = 2$ cm;
3. $\triangle ABC$: $a = 3$ cm, $b = 2$ cm, $c = 4$ cm.

Své odpovědi si ověřte pomocí nastavení odpovídajících posuvníků na dané hodnoty rovné délkám stran v příslušné podúloze.

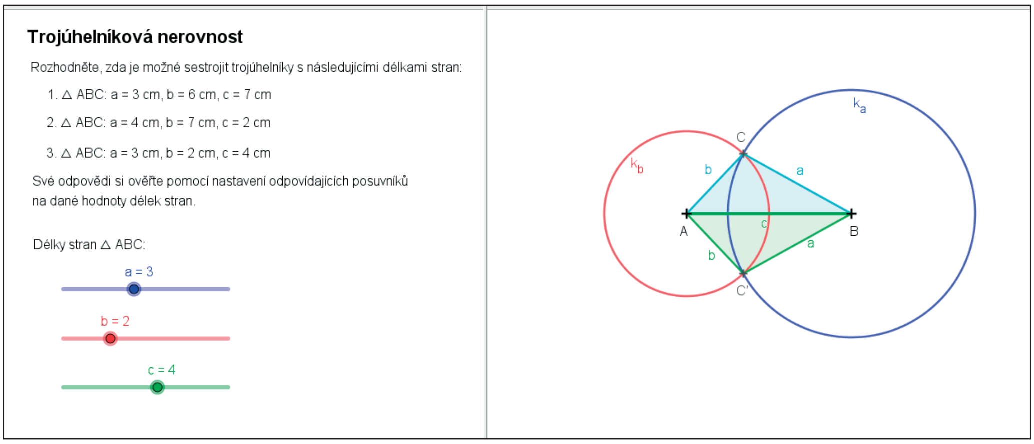
Pro náhled dynamického appletu vytvořeného v programu GeoGebra viz obr. 3.1.

- *Řešení úkolu*

Učitel společně s žáky zopakuje znění „trojúhelníkové nerovnosti“, tj. součet délek dvou libovolných stran trojúhelníku musí být delší než délka zbývající třetí strany trojúhelníku. Poté učitel žáky vyzve, aby rozhodli, ve které podúloze může být trojúhelník ABC sestrojen.

Správné řešení úlohy

1. Δ *ABC* je možné sestrojit, neboť platí, že $a + b > c$, $a + c > b$ i $b + c > a$.
2. Δ *ABC* není možné sestrojit, neboť $a + b > c$, $b + c > a$, ale $\boldsymbol{a + c < b}$.
3. Δ *ABC* je možné sestrojit, neboť platí, že $a + b > c$, $a + c > b$ i $b + c > a$.



Obr. 3.1: Applet na trojúhelníkovou nerovnost

GeoGebra applet je sestaven takovým způsobem, že učitel může požádat postupně tři žáky, aby každý z nich nastavil hodnoty posuvníků tak, aby odpovídaly délkám stran trojúhelníku *ABC* v jednotlivých podúlohách. S posuvníky je ve druhé 2D nákresně propojena konstrukce trojúhelníku *ABC*. Pokud v dané podúloze délky stran splňují trojúhelníkovou nerovnost, trojúhelník se v této nákresně vykreslí; v opačném případě není trojúhelník zobrazen.

- *Shrnutí aplikace aktivity v hodině*

Smyslem zařazení této aktivity na začátek hodiny je připomenutí žákům, za jakých podmínek může být trojúhelník sestrojen. Díky užití dynamičnosti programu GeoGebra proběhla rychlá vizuální kontrola žákovských řešení úlohy. Tj. žáci si mohli vzápětí pomocí nastavení posuvníků na zadané hodnoty názorně ověřit, zda bylo jejich řešení bezchybné či nikoliv.

Je-li aktivita použita ve třídě, v níž učitel pracuje s notebookem a s dataprojektorem či s interaktivní tabulí, může požádat po řadě jednotlivé žáky, aby na daném zařízení nastavili příslušné hodnoty posuvníků a zobrazili tím příslušné řešení úlohy dané úlohy za účelem společné kontroly. Ve třídě, v níž každý z žáků pracuje se svým tabletem, mohou žáci nejprve rozhodnout a do sešitu si zapsat, ve které podúloze je trojúhelník *ABC* sestrojitelný a ve které naopak zkonstruovatelný není. Teprve poté budou žáci vyzváni, aby si svá řešení zkontrolovali.

Učitel může případně také vyzvat žáky, aby samostatně vymysleli např. dva příklady trojúhelníků, které jsou zkonstruovatelné, a na druhou stranu také dva příklady trojúhelníků, které naopak sestrojitelné nejsou. Následně vyvolá čtyři žáky, z nichž dva předvedou svá řešení, pro něž lze trojúhelník *ABC* sestrojit, a další dva žáci zvolí takové hodnoty délek stran trojúhelníku *ABC*, pro něž trojúhelník *ABC* nelze zkonstruovat.

3.2.2.2 Druhá aktivita v hodině: Rozcvička 2 – zopakování typů trojúhelníků podle velikostí jejich vnitřních úhlů

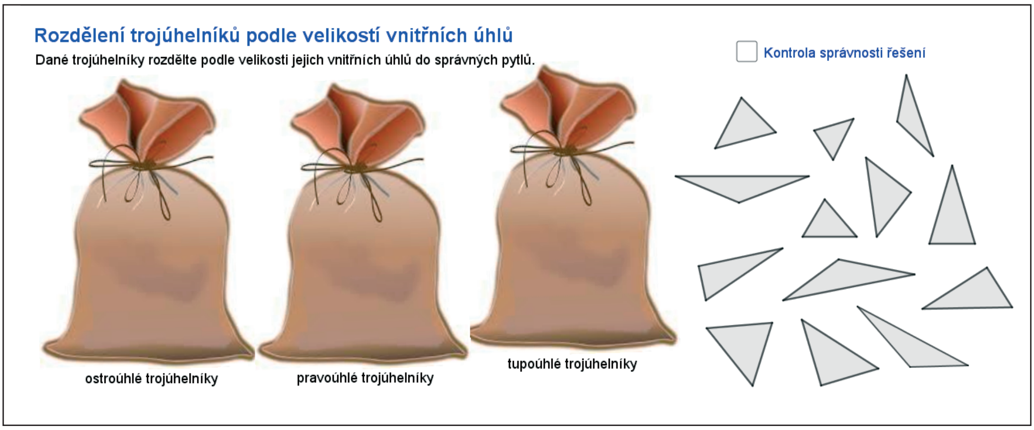
- *Motivace aktivity*

Je obecně známo, že Pythagorova věta je platná pouze pro pravoúhlé trojúhelníky. V této rozcvičce zopakujeme rozdělení trojúhelníků podle velikostí jejich vnitřních úhlů. Mezi trojúhelníky, které je třeba roztřídit, se vyskytují mimo jiné také pravoúhlé trojúhelníky. Rozcvička slouží mimo jiné k trénování odhadování velikostí vnitřních úhlů trojúhelníků žáky.

- *Zadání úkolu*

Dané trojúhelníky rozdělte podle velikosti jejich vnitřních úhlů do správných pytlů.

Pro náhled zadání aktivity v podobě dynamického GeoGebra appletu viz obr. 3.2.



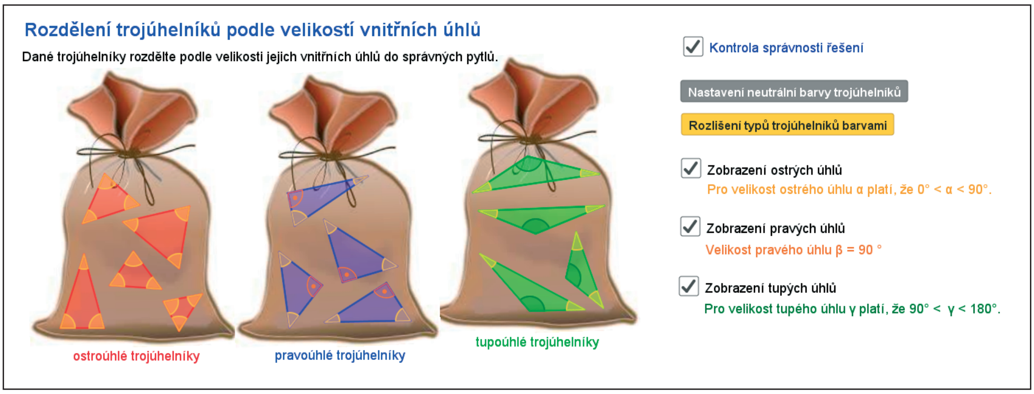
Obr. 3.2: Zadání úkolu ve formě appletu

- *Řešení úkolu*

Tato aktivita je opět připravena v podobě GeoGebra dynamického appletu. S šedými trojúhelníky lze v notebooku/PC posouvat tažením myši po nákresně, v tabletu tažením prstu po displeji, při užití interaktivní tabule tažením pomocí prstu po tabuli. Jakmile jsou všechny trojúhelníky přesunuty do pytlů, je možné aktivováním zaškrtávacího políčka „Kontrola správnosti řešení" zobrazit tlačítka „Nastavení neutrální barvy trojúhelníků", „Rozlišení typů trojúhelníků barvami" a zaškrtávací políčka „Zobrazení ostrých úhlů", „Zobrazení pravých úhlů" a „Zobrazení tupých úhlů". Stisknutím tlačítka „Rozlišení typů trojúhelníků barvami" se obarví všechny ostroúhlé trojúhelníky i označení pod prvním pytlem červeně, všechny pravoúhlé trojúhelníky i název pod prostředním pytlem modře a všechny tupoúhlé trojúhelníky i pojmenování pod posledním pytlem zeleně. Aktivací jednotlivých zaškrtávacích políček se v trojúhelnících barevně vyznačí příslušné typy úhlů – ostré úhly žlutě, pravé úhly oranžově a tupé úhly tmavě zeleně – a pod jednotlivými zaškrtávacími políčky se objeví ve stupňové míře intervaly hodnot pro ostré a tupé úhly a hodnota pro úhel pravý. Před jejich zobrazením se učitel může žáků na tyto hodnoty zeptat.

Na základě barevného zobrazení trojúhelníků žáci vidí, zda trojúhelníky roztřídili správně či nikoliv, tzn. získají okamžitou zpětnou vazbu své práce.

Na obr. 3.3 je zobrazen náhled řešení aktivity v dynamickém GeoGebra appletu.



Obr. 3.3: Řešení aktivity

- *Shrnutí aplikace aktivity v hodině*

Zařazením této aktivity v podobě dynamického GeoGebra appletu si žáci v krátkém čase zopakují rozlišení typů trojúhelníků podle velikosti jejich vnitřních úhlů. Průběh aplikace aktivity v hodině závisí na způsobu užití appletu, tj. na tom, zda applet žáci používají samostatně na tabletech či společně pod kontrolou učitele na notebooku/PC s projekcí skrze dataprojektor nebo s užitím interaktivní tabule. První případ je efektivnější, neboť má každý žák možnost si aktivitu vyzkoušet svým vlastním tempem a díky možnosti okamžitého vyhodnocení aktivity získá zpětnou vazbu, zda aktivitu vyřešil úspěšně anebo ne. Ve zbylých dvou případech učitel postupně vyvolá třináct žáků, každý z nich přemístí zvolený trojúhelník do odpovídajícího pytle. Jsou-li všechny trojúhelníky přemístěny do pytlů, proběhne společná kontrola provedeného rozdělení aktivováním tlačítka „Rozlišení typů trojúhelníků barvami“ a zobrazením vnitřních úhlů trojúhelníků zaškrtnutím příslušných políček. V případě, že byl některý z trojúhelníků zařazen do chybného pytle, provede učitel společně s žáky opravu.

Při opakování typů trojúhelníků a vnitřních úhlů v nich byly některé věci pro žáky jasné, některé bylo potřeba připomenout. Problémem byl například počet tupých úhlů v tupoúhlém trojúhelníku.

Závěrem je vhodné zopakovat některé důležité vlastnosti pravoúhlého trojúhelníku, připomenout, jak se nazývají jeho jednotlivé strany a jak je to s jejich délkami.

3.2.2.3 Třetí aktivita v hodině: Rozcvička 3 – procvičování výpočtu obsahu obrazce umístěného ve čtvercové síti

- *Motivace aktivity*

V této aktivitě je úkolem určit obsah obrazce vepsaného do čtvercové sítě. Znázorněný obrazec zjednodušeně představuje postavu dromedára. Pro vyvolání konkrétnějších představ dromedára je do appletu vložen obrázek skutečného dromedára. Zde se nabízí mezipředmětové vztahy mezi matematikou a přírodopisem.

- *Zadání úkolu*

Zjistěte přibližně velikost plochy, kterou zabírá dromedár ve čtvercové síti.

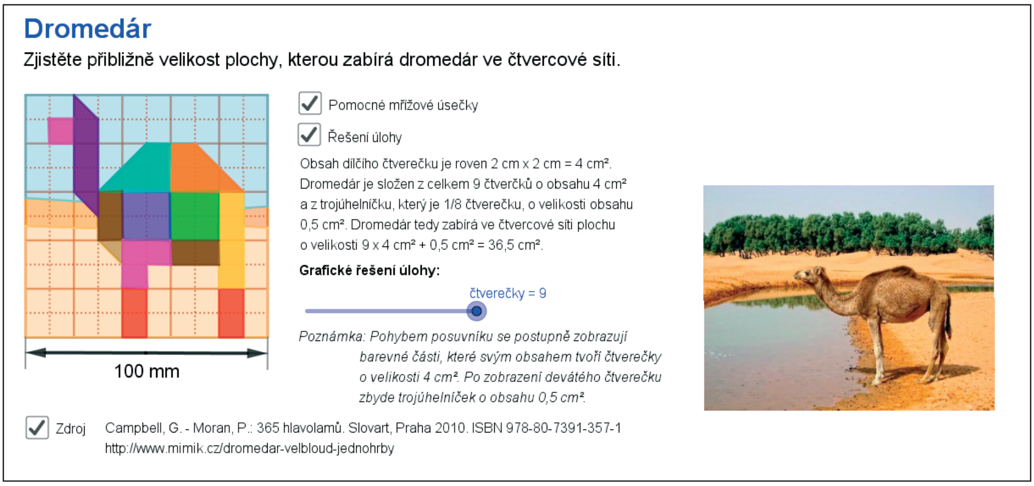
Na obr. 3.4 je znázorněn ilustrační obrázek zadání aktivity v podobě dynamického appletu vytvořeného v programu GeoGebra.

Obr. 3.4: Zadání aktivity v podobě appletu

- *Řešení úkolu*

Při odvození Pythagorovy věty s výhodou využijeme rozdělení čtverců sestrojených nad odvěsnami na jednotkové čtverečky, ty budou postupně přemísťovány do čtverce sestrojeného nad přeponou. V této aktivitě je úkolem určit obsah obrazce vepsaného do čtvercové sítě, přitom ne všechny části obrazce vyplňují zobrazené jednotkové čtverce dané sítě. Žáci by si tedy měli najít vlastní vhodnou strategii vedoucí k úspěšnému vyřešení této aktivity. Jednou z možných strategií může být imaginativní přemisťování dílčích částí obrazce takovým způsobem, aby vhodně vytvořily jednotkové čtverce dané sítě. Ty lze spočítat, vynásobit obsahem jednotkového čtverce sítě, ev. k výsledku přičíst obsah zbylé části, která nevyplní celý jednotkový čtverec sítě, a následně určit obsah celého znázorněného obrazce.

Na obr. 3.5 je vidět jedno z možných řešení úlohy, které je vytvořeno v dynamickém GeoGebra appletu dané aktivity a které odpovídá výše uvedené strategii řešení. V appletu je popsáno řešení úlohy následujícím způsobem: „Obsah dílčího čtverečku je roven 2 cm x 2 cm = 4 cm^2. Dromedár je složen z celkem 9 čtverečků o obsahu 4 cm^2 a z trojúhelníčku, který je 1/8 čtverečku, o velikosti obsahu 0,5 cm^2. Dromedár tedy zabírá ve čtvercové síti plochu o velikosti 9 x 4 cm^2 + 0,5 cm^2 = 36,5 cm^2."



Obr. 3.5: Možné řešení úlohy

Pohybem posuvníku nazvaného „čtverečky" se postupně zobrazují barevné dílčí části obrazce, které dohromady tvoří jednotkový čtverec sítě o obsahu 4 cm^2. Tyto barevné dílčí části jsou znázorněny na obr. 3.5.

V appletu je také zakomponováno zaškrtávací políčko s názvem „Pomocné mřížové úsečky". Jeho aktivováním lze zobrazit jemnější dělení dané čtvercové sítě. Pro srovnání viz obr. 3.4 a obr. 3.5.

Další možnou strategií řešení úlohy je užití této jemnější sítě. I při volbě této strategie určujeme počet jednotkových čtverečků, dílčí části (trojúhelníčky, které jsou nyní polovinami jednotkových čtverečků) v jednotkové čtverečky skládáme. Tato strategie se jeví vizuálně jednodušší.

- *Shrnutí aplikace aktivity v hodině*:

Zařazením této aktivity v hodině si žáci připomenou nejen práci se čtvercovou sítí, ale i výpočet obsahu obrazce s užitím čtvercové sítě. Tuto aktivitu by měli žáci řešit nejprve samostatně.

Především by jim měl učitel poskytnout dostatek času, aby si mohli promyslet vhodný způsob řešení aktivity a ten po té aplikovat. Jakmile bude mít velká většina žáků spočítanou výslednou hodnotu obsahu obrazce, může učitel nechat žáky napsat výsledné hodnoty na tabuli. Tím zjistí, jaký je rozptyl mezi správnou odpovědí a chybně určenými odpověďmi, a také kolik studentů našlo správnou odpověď a kolik naopak chybnou. Než učitel zobrazí studentům předpřipravené řešení, měl by se jich zkusit zeptat, jak úlohu vlastně řešili.

3.2.2.4 Čtvrtá aktivita v hodině: Odvození Pythagorovy věty

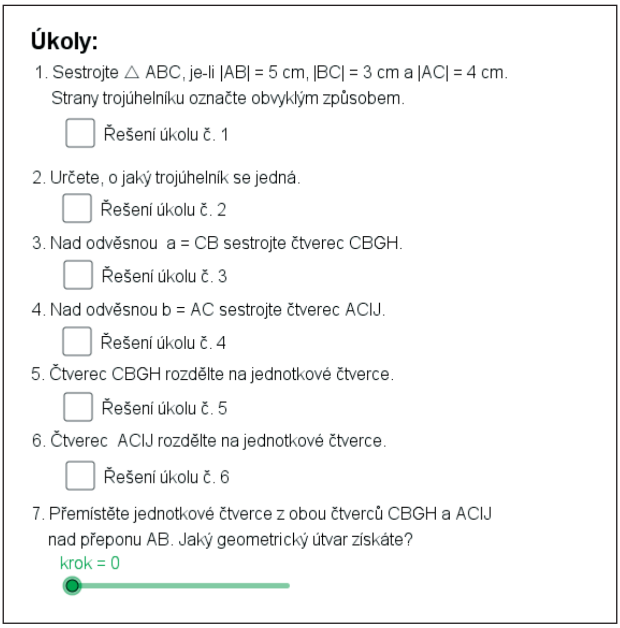
- *Motivace aktivity*

Cílem této aktivity je odvození Pythagorovy věty samotnými žáky na základě přemisťování jednotkových čtverečků, z nichž se skládají čtverce sestrojené nad odvěsnami pravoúhlého trojúhelníku, do čtverce sestrojeného nad přeponou téhož pravoúhlého trojúhelníku. Tři výše uvedené aktivity byly motivačními a přípravnými úlohami této hlavní aktivity

- *Zadání úlohy*

Odvodit Pythagorovu větu induktivní metodou

Na obr. 3.6 je znázorněn ilustrační obrázek dynamického appletu vytvořeného v programu GeoGebra. Tento applet představuje zadání aktivity v podobě jednotlivých úkolů vedoucích k odvození Pythagorovy věty induktivní metodou.



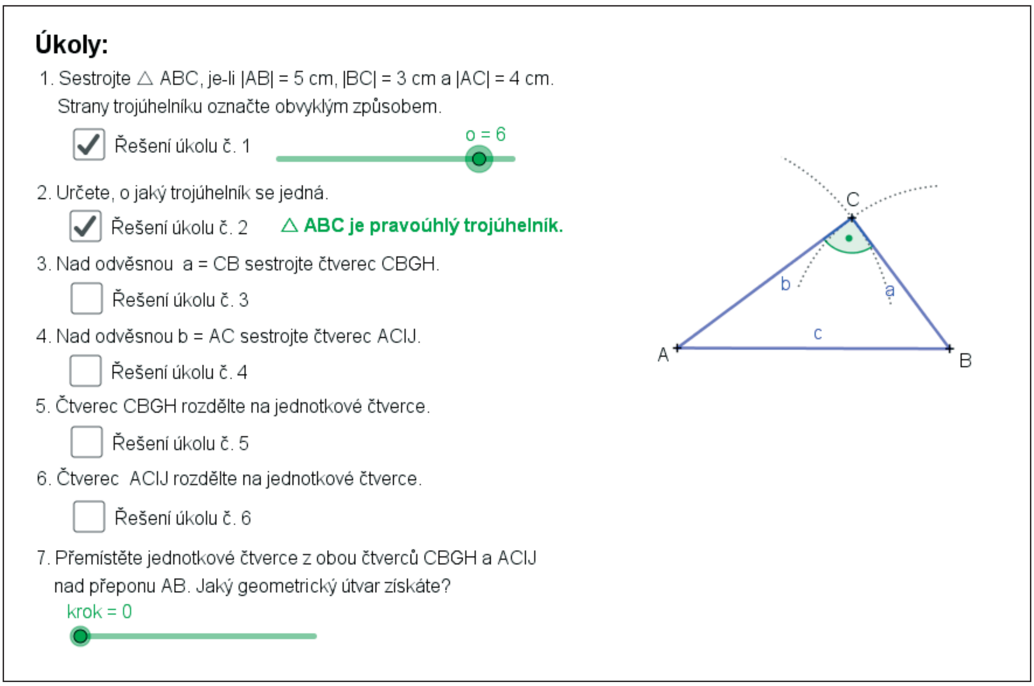
Obr. 3.6: Zadání aktivity

- *Řešení úkolu*

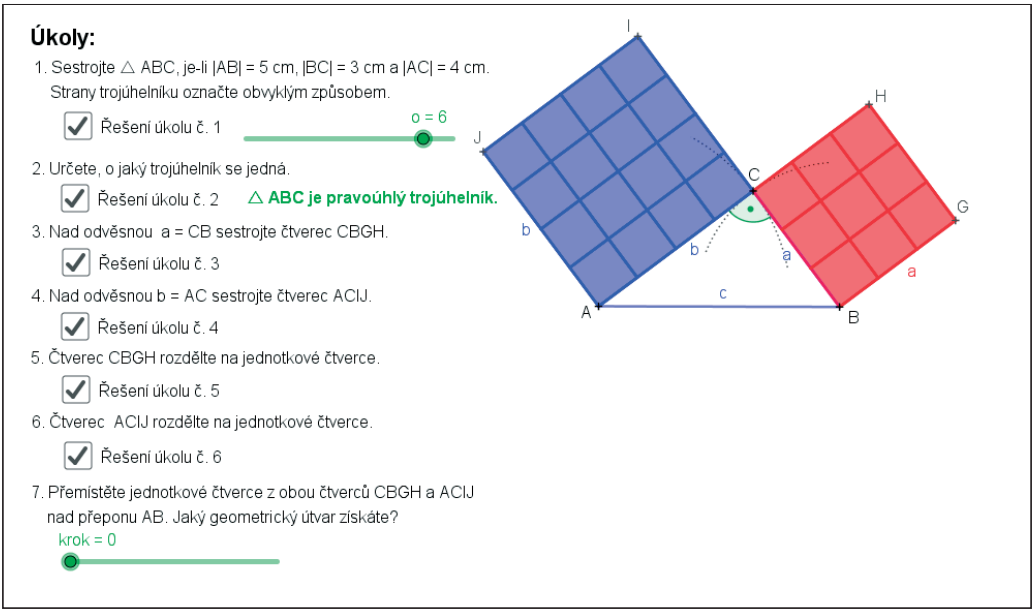
Pro odvozování Pythagorovy věty induktivní metodou byl sestaven GeoGebra dynamický applet, v němž se do čtverců nad odvěsnami pravoúhlého trojúhelníku vykreslí čtverečky, které se pak postupně přemístí do čtverce sestrojeného nad přeponou téhož pravoúhlého trojúhelníku. Úkolem žáků je postupovat krok po kroku podle jednotlivých úkolů appletu. Žáci nejprve narýsují pravoúhlý trojúhelník podle věty *sss*, tj. na základě zadání délek všech tří jeho stran. Žáci dále plní jednotlivé úkoly appletu. Určí, o jaký typ trojúhelníku dle velikostí jeho vnitřních úhlů se jedná. Sestrojí čtverce nad oběma odvěsnami pravoúhlého trojúhelníku, oba čtverce posléze rozdělí na jednotkové čtverce. Jednotkové čtverce pak postupně přemístí nad přeponu trojúhelníku. Úkolem žáků je zjistit, jaký geometrický útvar jim po přemístění jednotkových čtverců nad přeponu pravoúhlého trojúhelníku vznikne.

Učitel bude obdobně (avšak s krátkým časovým odstupem oproti žákům) zobrazovat přemísťování čtverečků v appletu. Žáci tak budou moci kontrolovat, zda postupují správně. Žáci by pak měli sami zkusit popsat, k čemu došli. Závěrem by pak měli zformulovat Pythagorovu větu, nejprve slovně a po té by měli být učitelem vyzváni, aby Pythagorovu větu zkusili zapsat i symbolicky.

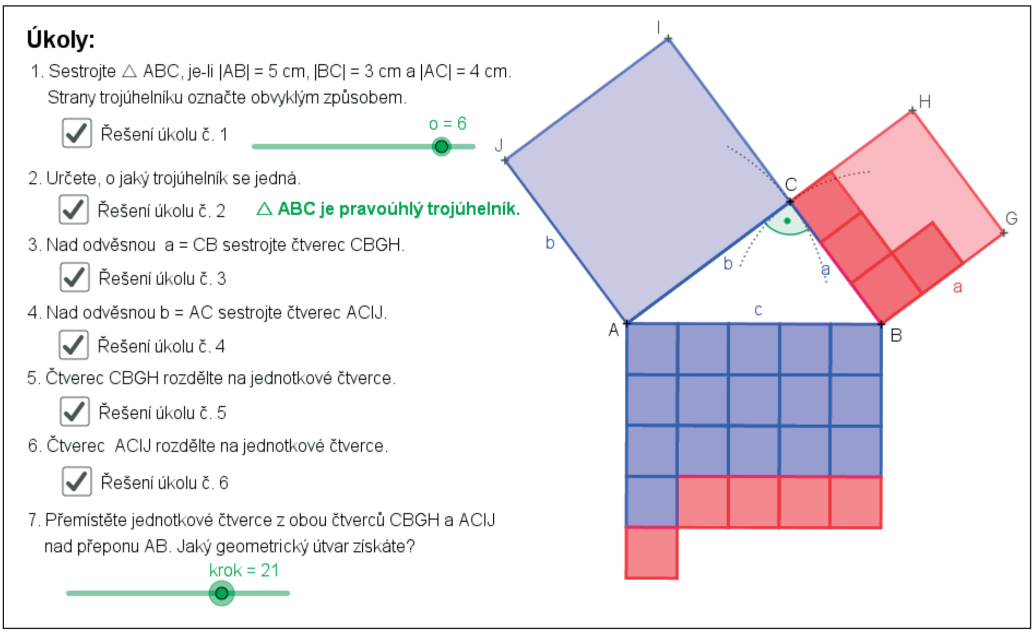
Na obr. 3.7–3.10 jsou ukázány některé dílčí kroky řešení úkolů appletu. Na obr. 3.10 jsou již všechny čtverečky přemístěny a Pythagorova věta je symbolicky zapsána.



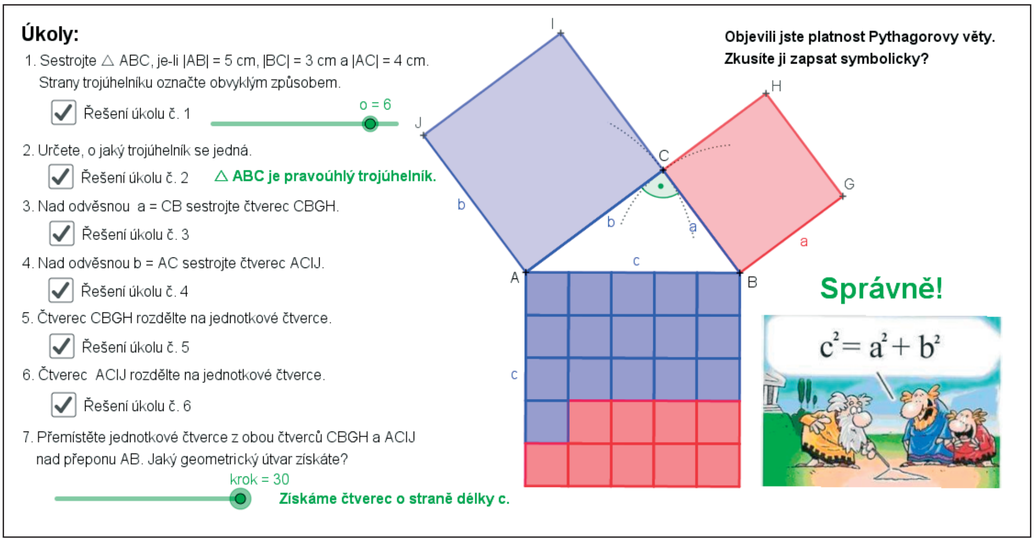
Obr. 3.7: Řešení úloh



Obr. 3.8: Řešení dalších úloh



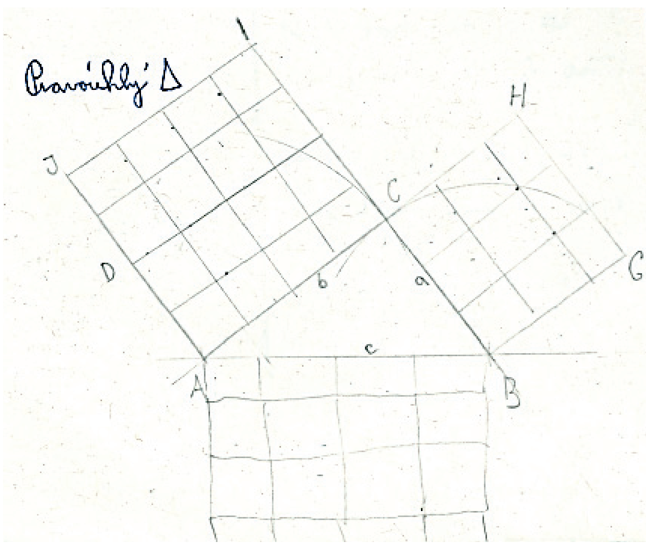
Obr. 3.9: Řešení úkolů



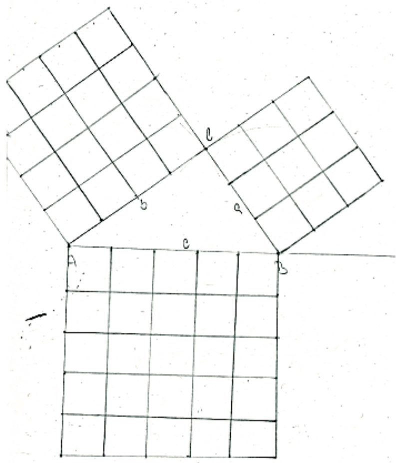
Obr. 3.10: Výsledné řešení

- *Shrnutí aplikace aktivity v hodině*

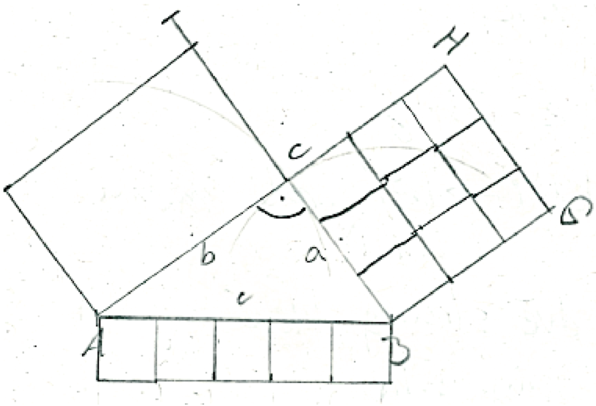
Žáci nejprve narýsovali pravoúhlý trojúhelník se stranami o délkách 3 cm, 4 cm a 5 cm podle prvního úkolu v appletu. Pak měli za úkol narýsovat nad oběma odvěsnami čtverce o délkách rovných příslušným stranám trojúhelníku. Zde došlo k několika zádrhelům. Protože žáci nebyli dopředu upozorněni na to, kolik potřebují místa kolem trojúhelníku, některým se čtverce nevešly celé a museli začít kreslit obrázek znovu. Jiní žáci měli problém narýsovat čtverec. Následující obrázky ukazují, jak to občas dopadlo…



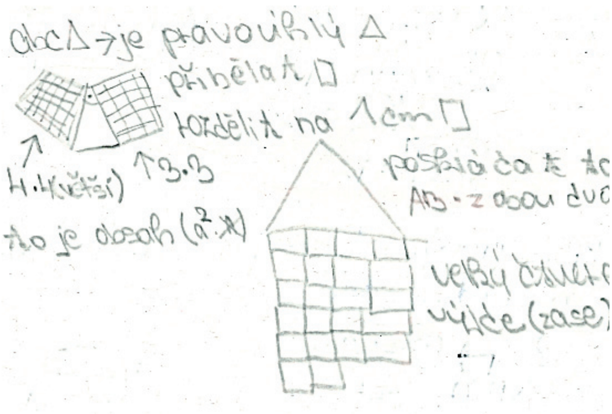
Obr. 3.11: Žákovské řešení



Obr. 3.12: Další žákovské řešení

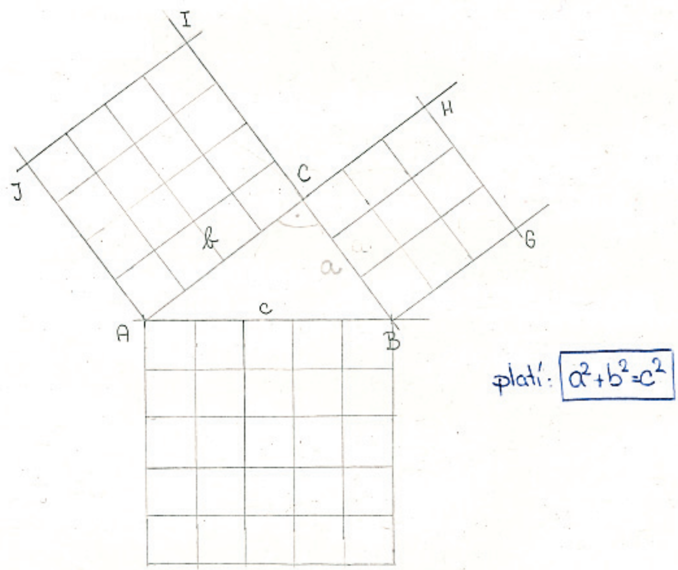


Obr. 3.13: Žákovské řešení



Obr. 3.14: Další žákovské řešení

Při užití appletu v dalších třídách/hodinách je tedy vhodné mít tuto skutečnost na paměti a žáky upozornit, že je zapotřebí si nechat kolem obrázku na všech stranách dostatek místa, aby žáci sestrojili obrázky podobné tomu, jako je zobrazený na obr. 3.15, protože samotní žáci předem nevědí, jak bude vypadat výsledný obrázek.



Obr. 3.15: Vhodné umístění řešení

Během promítání appletu na tabuli pomocí dataprojektoru nastal problém se zobrazením textu, respektive se zobrazením velikosti písma. Písmo bylo příliš malé a učitel musel žákům zadání úlohy číst. Zvětší-li se totiž v programu GeoGebra velikost písma, zvětší se všechny texty i sestrojené objekty. V takovém případě pak vzniká riziko, že se vše nevejde na nákresnu tak, jak je potřeba. Před použitím appletu v hodině je žádoucí, aby si učitel applet zkusil otevřít v příslušném elektronickém zařízení (notebook, tablet či PC), z nějž bude applet promítat. V tomto zařízení by měl učitel v appletu nastavit optimální velikost písma, která bude pro žáky čitelná a která umožní promítání všech sestrojených objektů takovým způsobem, jak mají být zobrazeny.

Po dokončení úlohy si většina žáků uvědomila, co se vlastně při rýsování stalo. Tito žáci byli schopni vlastními slovy popsat vzniklou skutečnost. Odhalili tedy za pomoci induktivní metody pravidlo Pythagorovy věty.

Na otázku, zda by bylo možné nad stranami trojúhelníku sestrojit i jiné obrazce než čtverce, některé žáky napadly tyto následující možnosti – rovnostranný trojúhelník, pravidelný šestiúhelník a půlkruh.

3.2.2.5 Pátá aktivita v hodině: Pythagorova věta trochu jinak

- *Motivace aktivity*

Zařazení této aktivity vyplynulo spontánně přímo ze situace v hodině. Vzhledem ke skutečnosti, že sami žáci na konci předchozí aktivity začali navrhovat jiné rovinné geometrické obrazce, které by mohly být užity místo čtverců, má učitel možnost v rámci této aktivity ukázat žákům, že jejich návrhy byly správné. Tato aktivita může být učitelem v hodině využita v případě, že se ve třídě vyskytne podobná situaci, při níž samotní žáci začnou navrhovat místo užití čtverců jiné rovinné geometrické obrazce. V opačném případě není nutné tuto aktivitu v první hodině zařazovat. Vždy záleží na zvážení učitele.

- *Zadání úlohy*

Ukázat, že Pythagorova věta platí, i když jsou nad stranami pravoúhlého trojúhelníku sestrojeny půlkruhy nebo pravidelné mnohoúhelníky.

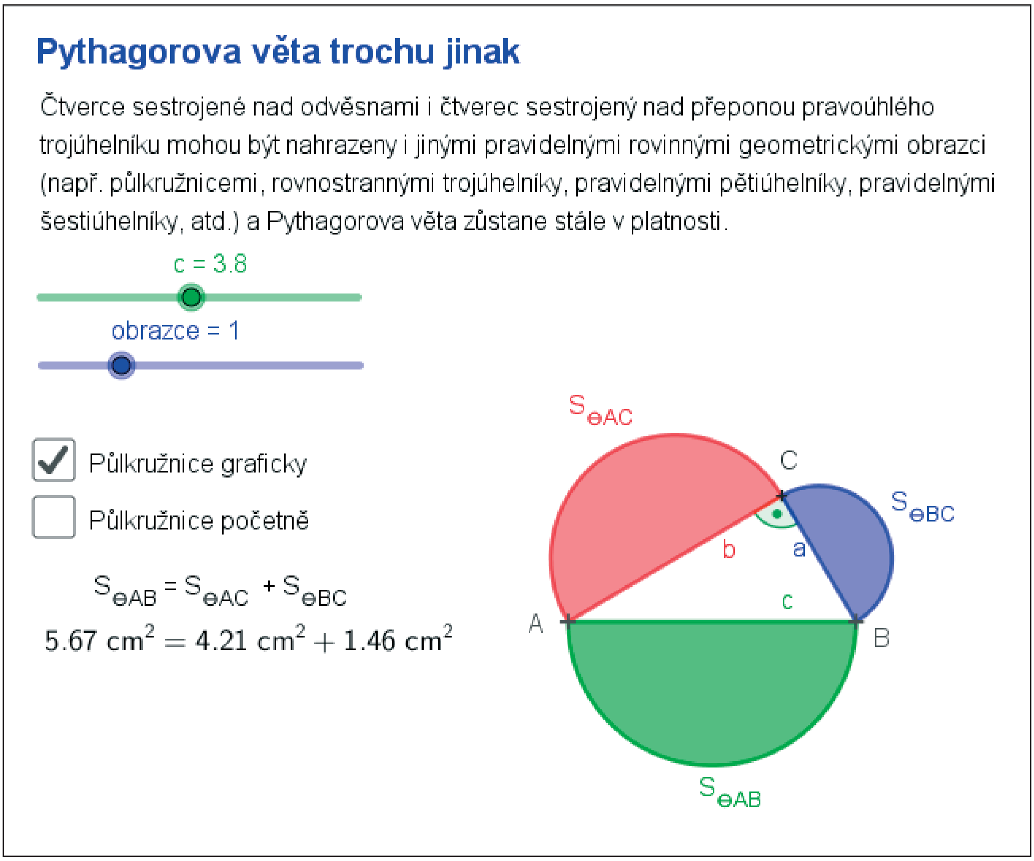
- *Řešení úkolu*

Pro názornou ukázku platnosti Pythagorovy věty i při sestrojení jiných rovinných geometrických útvarů než čtverců nad stranami pravoúhlého trojúhelníku učitel užije připravený dynamický GeoGebra applet.

Pohybem posuvníku s názvem „*c*" lze měnit velikost přepony $c = AB$ daného pravoúhlého trojúhelníku *ABC* a posouváním bodu *C* po nákresně je možné měnit velikosti obou odvěsen trojúhelníku *ABC*.

Posuvník pojmenovaný „obrazce" pod sebou v jednotlivých polohách skrývá zobrazení čtyř různých rovinných geometrických obrazců. V poloze 1 jsou to půlkružnice (viz obr. 3.16 a obr. 3.17), v poloze 2 rovnostranné trojúhelníky (viz obr. 3.18), v poloze 3 pravidelné pětiúhelníky (viz obr. 3.19) a v poloze 4 pravidelné šestiúhelníky (viz obr. 3.20).

Při nastavení posuvníku „obrazce" do odpovídající polohy se pod posuvníkem zobrazují dvě zaškrtávací políčka. Např. v poloze 1 se objeví políčka „Půlkružnice graficky" a „Půlkružnice početně" (analogicky také pro tři další vybrané pravidelné mnohoúhelníky). Aktivováním jednoho či druhého políčka se nad stranami pravoúhlého trojúhelníku *ABC* znázorní příslušné rovinné geometrické obrazce. Zaškrtnutím políčka „ … graficky" se pod zaškrtávacími políčky zobrazí obecná rovnice udávající vztah mezi obsahem obrazce sestrojeného nad přeponou pravoúhlého trojúhelníku *ABC* a součtem obsahů obrazců sestrojených nad odvěsnami pravoúhlého trojúhelníku *ABC*. Pod obecným vztahem jsou vloženy odpovídající vypočtené numerické hodnoty příslušných obsahů. Ty se dynamicky mění v závislosti na změnách délek stran pravoúhlého trojúhelníku *ABC* (pro změny jejich nastavení viz výše), viz obr. 3.16.

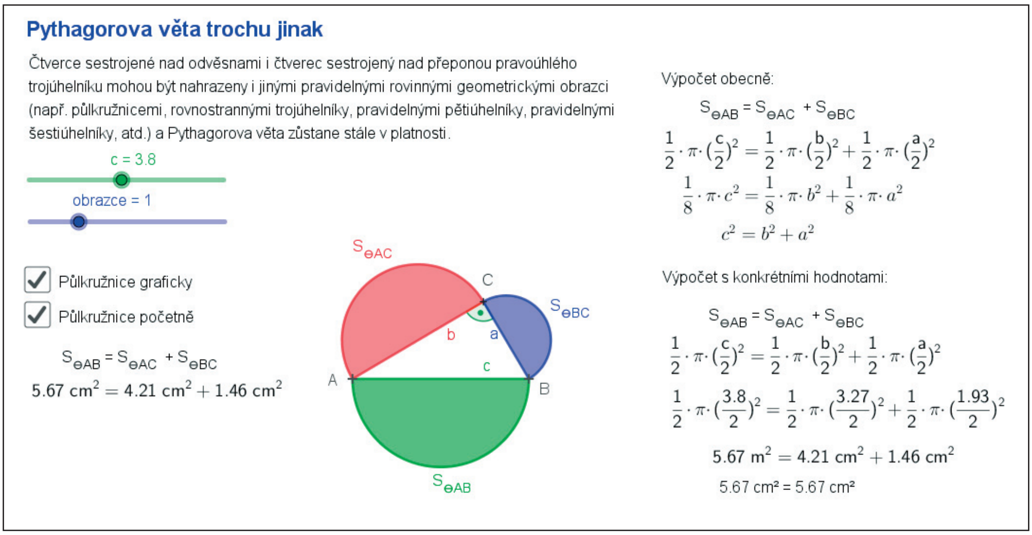


Obr. 3.16: Půlkružnice

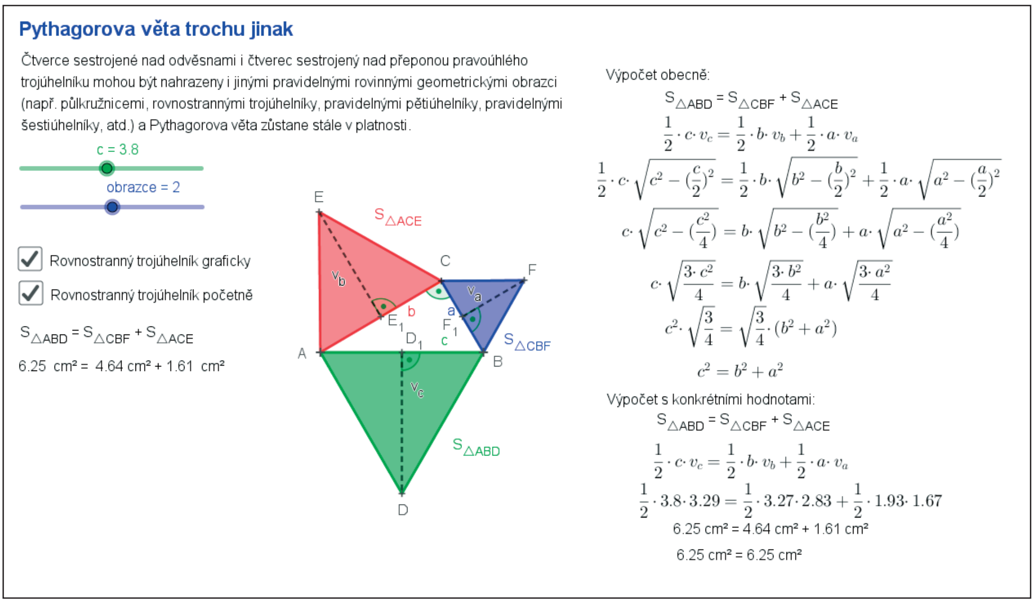
Aktivací zaškrtávacího políčka „… početně" může učitel žákům ukázat odvození Pythagorovy věty ze vzorců platných pro obsahy jednotlivých rovinných geometrických obrazců, ale i jednotlivé dílčí kroky numerického výpočtu s konkrétními hodnotami, které jsou propojeny se zadanými prvky pravoúhlého trojúhelníku *ABC*. Ukázka těchto odvození však může být zařazena spíše jen ve třídě s nadanými a bystrými žáky, případně v tercii osmiletého gymnázia. Dle RVP pro základní školy totiž výpočet obsahu kruhu zpravidla nepředchází výkladu Pythagorovy věty. Při odvození Pythagorovy věty s užitím rovnostranných trojúhelníků je třeba vyjádřit délku výšky rovnostranného trojúhelníku právě pomocí Pythagorovy věty, což při samotném výkladu Pythagorovy věty není nejvhodnější. Ve vzorci pro výpočet obsahu pravidelného pětiúhelníku se vyskytuje pro žáky 8. ročníku ZŠ poměrně složité iracionální číslo, proto ani odvození Pythagorovy věty s užitím pravidelných pětiúhelníků není pro žáky snadné. Odvození Pythagorovy věty ze vzorce pro obsah pravidelného šestiúhelníku se jeví jako nejpříhodnější.

Jsou-li ve třídě nadaní žáci, může je učitel nechat samostatně vyhledat vzorec pro výpočet pravidelného šestiúhelníku a nechat je na jeho základě odvodit Pythagorovu větu.

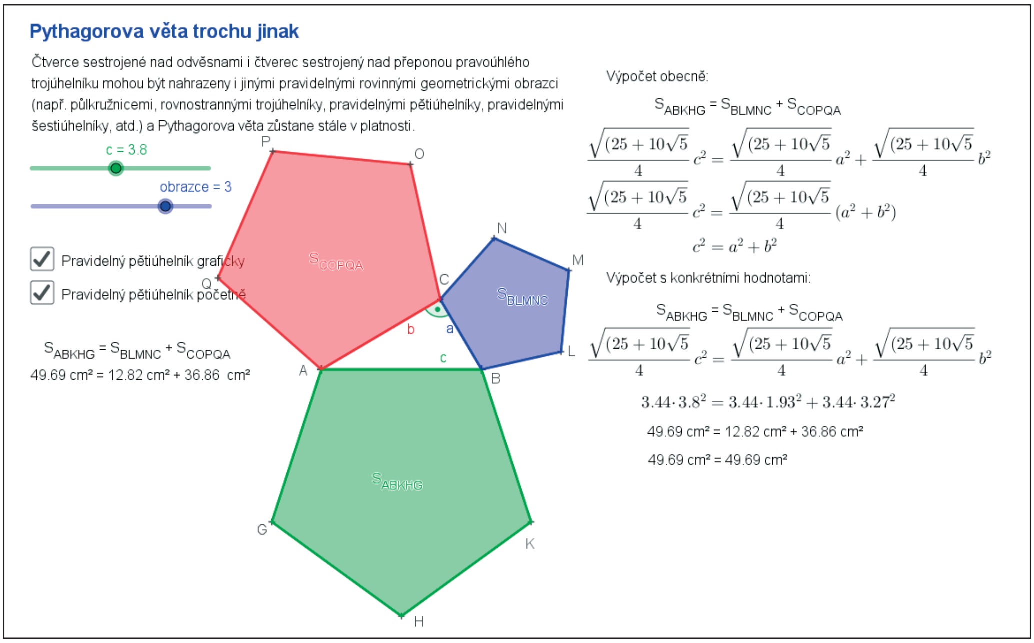
V appletu nebyl již použit pravidelný sedmiúhelník, neboť ve vzorci pro výpočet jeho obsahu se objevuje goniometrická funkce sinus. Žáci se však s goniometrickými funkcemi setkávají poprvé až v 9. ročníku základní školy.



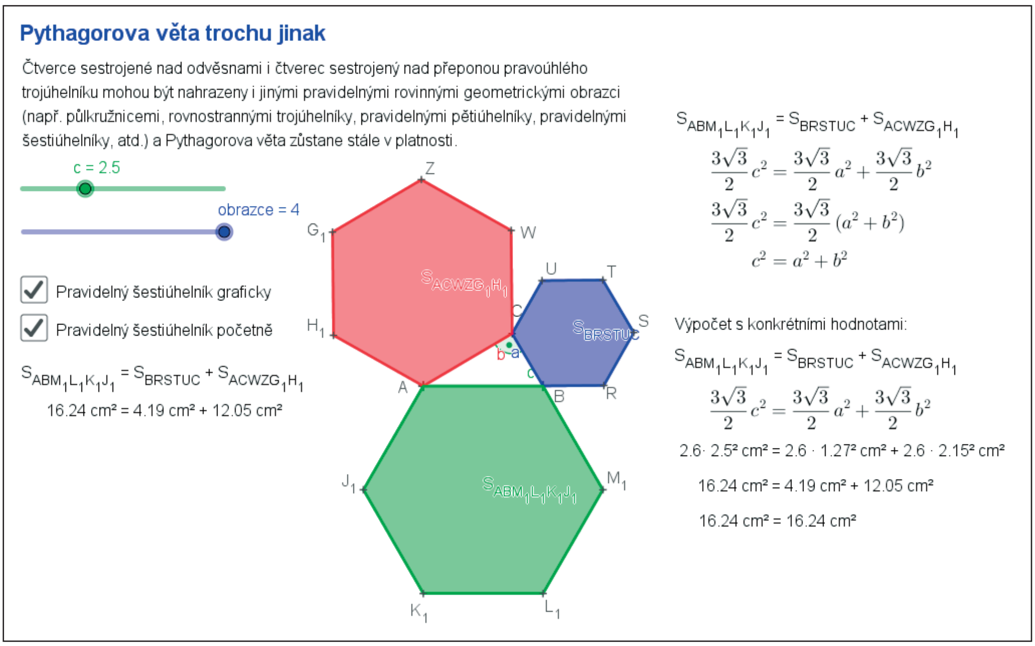
Obr. 3.17: Výpočet obsahů půlkruhů



Obr. 3.18: Rovnostranné trojúhelníky



Obr. 3.19: Pravidelné pětiúhelníky



Obr. 3.20: Pravidelné šestiúhelníky

- *Shrnutí aplikace aktivity v hodině*

S uvedeným appletem pracuje převážně jen učitel. Je na jeho zvážení, zda applet do hodiny zařadí či nikoliv, jaké údaje studentům ukáže atd. Jeho rozhodnutí závisí především na skladbě žáků ve třídě.

Další aktivity, které připadají v úvahu a ke kterým je možné využít prostředí dynamického softwaru GeoGebra je ověření platnosti Pythagorovy věty pro různé pravoúhlé trojúhelníky. Nabízí se zde možnost objevení poznatku, že Pythagorova věta pro jiné trojúhelníky než pravoúhlé neplatí. Další applety v tuto chvíli vytvořeny nejsou, což dává prostor pro vlastní tvorbu učitelů. Některé inspirace si učitelé mohou vzít z níže uvedené databanky výukových materiálů.

3.3 Závěr

Zařazení aktivit v podobě vytvořených dynamických GeoGebra appletů se při výuce tématu Pythagorova věta v testovaných třídách osvědčilo. Žáci měli možnost si interaktivním způsobem zopakovat platnost trojúhelníkové nerovnosti, díky další dynamické rozcvičce si v krátkém čase připomněli typy trojúhelníků podle velikosti jejich vnitřních úhlů a svou geometrickou představivost si rozvíjeli pomocí úlohy, jejímž úkolem bylo určit obsah obrazce (připomínajícího dromedára) zobrazeného ve čtvercové síti.

V testovaných třídách byly applety výše uvedených rozcviček užity při společné práci učitele s žáky, resp. k jejich řešení bylo použito interaktivní tabule. Tento způsob řešení aktivit vyučujícím i žákům vyhovoval. Ale i přesto jsme při závěrečné diskusi společně navrhli, že by bylo vhodné vytvořit dva typy appletů - jeden ve verzi pro žáky bez řešení a druhý ve verzi pro učitele s řešením. Otázkou zůstává, který případ, tj. zda společné řešení aktivit učitele s žáky či zda samostatné řešení aktivit žáky (každý žák by měl možnost si aktivitu vyzkoušet sám svým vlastním tempem), bude efektivnější. Závěr je nyní těžké vyvodit, neboť každému žáku může vyhovovat jiný způsob učení. Efektivita se projeví opět až při dalším užití appletů při výuce.

Odvození Pythagorovy věty induktivní metodou probíhal krok za krokem podle vytvořeného appletu. Žáci podle něj nejprve narýsovali pravoúhlý trojúhelník se stranami o daných délkách na základě prvního úkolu v appletu. Pak měli za úkol narýsovat postupně nad oběma odvěsnami čtverce o délkách rovných příslušným stranám trojúhelníku. Zde došlo k několika zádrhelům. Protože žáci nebyli při pilotním testování dopředu upozorněni na to, kolik potřebují místa kolem trojúhelníku, některým se čtverce nevešly celé a museli začít kreslit obrázek znovu. Při užití appletu v dalších třídách/hodinách je tedy vhodné mít tuto skutečnost na paměti a žáky upozornit, že je zapotřebí si nechat kolem obrázku na všech stranách dostatek místa k vyrýsování čtverců nad stranami trojúhelníku.

Oba sestrojené čtverce posléze rozdělili na jednotkové čtverečky. Jednotkové čtverečky pak měli za úkol přemístit (přerýsovat) nad přeponu daného pravoúhlého trojúhelníku. Jejich posledním úkolem bylo zjistit, jaký geometrický útvar po přemístění jednotkových čtverečků nad přeponu pravoúhlého trojúhelníku vznikne. Po dokončení úlohy si většina žáků ať už při pilotním, tak i při ostrém testování uvědomila, co se vlastně při rýsování stalo. Tito žáci byli schopni vlastními slovy popsat vzniklou skutečnost. Odhalili tedy za pomoci induktivní metody pravidlo Pythagorovy věty.

Na otázku učitele, zda by bylo možné nad stranami trojúhelníku sestrojit i jiné obrazce než čtverce, některé žáky napadly tyto následující možnosti – rovnostranný trojúhelník, pravidelný šestiúhelník nebo půlkruh. Jejich tvrzení byla možná ověřit pomocí pátého vytvořeného dynamického appletu s názvem Pythagorova věta trochu jinak.

Z pěti výše uvedených dynamických GeoGebra appletů byla vytvořena online GeoGebra kniha s názvem Pythagorova věta. Tato GeoGebra kniha je zatím přístupná pouze skrze odkaz na webovém linku https://www.geogebra.org/m/shz3n8dw.

Spolupracující vyučující ze ZŠ Liberecká v Jablonci nad Nisou nás, oborové didaktiky, potěšili následujícím konstatováním: „Vytvořený materiál budeme rozhodně využívat v dalších letech, a to nejen my, ale i další naši kolegové, které jsme s tímto materiálem seznámili na jedné z mnoha schůzek našeho metodického sdružení. Za velmi užitečnou považujeme i databanku popsaných výukových materiálů."

3.4 Literatura

Běloun, F. a kol. Sbírka úloh z matematiky pro základní školu. Praha: Prometheus, 1992. ISBN 80-85849-63-1.

Kočí, S. a Kočí, L. Matematika. 8. ročník – 1. díl. Šumperk: Reprotisk s.r.o.

Odvárko, O. a Kadleček, J. Matematika pro 8. ročník základní školy [1]. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 80-7196-148-5.

Odvárko, O. a Kadleček, J. Pracovní sešit z matematiky 8. ročník ZŠ. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 978-80-7196-437-7.

Výukový software Didakta. Geometrie 2. Výpočty a měření. Opava: Silcom multimédia s.r.o., 2003.

Ženatá, E.: Sbírka úloh z matematiky pro 8. ročník s klíčem. Benešov: Blug, 2006. ISBN 80-7274-962-5. Dostupné z: http://toc.nkp.cz/NKC/200710/contents/nkc20071757117_1.pdf

Summary

Let´s summarize that there were mentioned and methodologically described three planimetric warm-ups and two activities concerning the interpretation of the Pythagorean theorem in the first chapter of the document. Three planimetric warm-ups as well as the activities concerning the interpretation of the Pythagorean theorem were created as the dynamic GeoGebra applets. The planimetric warm-ups introduce the preparatory tasks. Using the first planimetric warm-up, the pupils practise the triangular inequality. Solving the second planimetric warm-up, the children repeat the types of a triangle according to the sizes of inner angles of a triangle. Calculating the size of an area of the drawn shape in the square

net, the pupils improve their geometric thinking. All the planimetric warm-ups led to successfully fulfil the tasks given in the main activity – dynamic applet concerning to find out the Pythagorean theorem by the inductive method. It was realised that the activity was thought out in such a way that is understandable for the pupils. Most of them was able to formulate the Pythagorean theorem on their own.

Consequently, the online GeoGebra book named “Pythagorean Theorem” was created from five above mentioned dynamic applets. The GeoGebra book “Pythagorean Theorem” can be found on the web link https://www.geogebra.org/m/shz3n8dw.

The list of online teaching materials extended by short annotations was mentioned in the second chapter of the document.

Finally, let´s mention that the cooperating teachers have tried to implement the created materials into their lessons and that they were satisfied by all of them.

4. Práce s kartézskou soustavou souřadnic

Vlasta Moravcová, Jarmila Robová, Štěpánka Kaňková

Abstrakt:
Příspěvek byl sepsán jako metodický materiál pro učitele matematiky na druhém stupni základní školy a v nižších ročnících víceletého gymnázia. Je věnován propedeutice analytické geometrie, konkrétně zavedení pravoúhlé soustavy souřadnic, úlohám zaměřeným na procvičení souřadnic bodu a propedeutice pojmu vektor a jeho souřadnice. Důraz je kladen na propojení nového učiva s učivem již probraným, vizualizaci a procvičení pojmů z oblasti rovinné geometrie. Cílem je představit nové pojmy žákům názorně a omezit jejich pouhé formální pochopení na minimum. Materiál je doplněn sadou pracovních listů.

Klíčová slova:
kartézská soustava souřadnic, souřadnice bodu, čtverec, obdélník, trojúhelník, obvod, obsah, algebraický výraz, procházka soustavou souřadnic, vektor

Abstract:
The paper was prepared as a methodical material for mathematics teachers of the lower secondary schools. It is devoted to propaedeutics of analytical geometry, particularly to introduction of an orthogonal coordinate system, tasks focused on practicing point coordinates and propaedeutics of the concept of vector and its coordinates. An emphasis is placed on interconnection of the new subject matter with the one taught before, visualization and practicing of plane geometry. The main aim is to introduce to pupils the new concepts graphically and to limit their formal understanding. The material is completed with a set of worksheets.

Keywords:
orthogonal coordinate system, point coordinates, square, rectangle, triangle, perimeter, area, algebraic expression, walk in a coordinate system, vector

4.1 Úvod

Během spolupráce oborové didaktičky RNDr. Vlasty Moravcové, Ph.D., z Katedry didaktiky matematiky Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze s vyučující Mgr. Štěpánkou Kaňkovou z šestiletého Gymnázia Na Pražačce, Nad Ohradou 23, Praha 3 v rámci projektu vznikl námět pro vytvoření výukového materiálu věnovaného propedeutice analytické geometrie. Toto téma bývá vyučováno zpravidla v 7. nebo 8. ročníku základní školy, avšak velmi sporadicky. V učebnicích je uvedeno jen omezené množství úloh, v některých se téma omezuje jen na zavedení kartézské soustavy souřadnic za účelem kreslení grafů funkcí. Při výuce analytické geometrie ve vyšších ročnících gymnázia jsme pak dlouhodobě pozorovaly problémy žáků s pochopením učiva související s formálním chápáním vztahů, rychlým výkladem a nedostatečnou grafickou vizualizací.

Předkládaný materiál přináší řadu námětů a inspirací, jak práci s kartézskou soustavou přirozeně zařadit do výuky (nejen v souvislosti s funkcemi) již na druhém stupni ZŠ. Domníváme se, že při opakovaném procvičování a vracení se k podobným úlohám žáci ve vyšším věku nebudou mít tolik problémů s učivem analytické geometrie. Naše domněnky jsme si také experimentálně ověřily v praxi, viz (Moravcová & Kaňková, 2018a, 2018b).

Metodický materiál obsahuje tři stěžejní kapitoly popisující ideální průběh tří vyučovacích hodin. První hodina (kapitola 2) je věnována zavedení kartézské soustavy souřadnic a procvičení souřadnic bodů. Zahrnuje práci s pracovním listem *Čtverec a obdélník*. Druhá hodina (kapitola 3) prohlubuje propojení planimetrických úloh s prací v kartézské soustavě souřadnic prostřednictvím pracovního listu *Trojúhelníky* a dalších úloh. Třetí hodina (kapitola 4) je zaměřena na propedeutiku pojmu vektor. Žáci objevují souvislost mezi zápisem mnohočlenů s proměnnými x a y a pohybem v kartézské soustavě souřadnic. Tento pohyb se následně snaží zapsat jednodušším způsobem, až dospějí k souřadnicím vektoru.

Předložené náměty není nutné vyučovat jednorázově v několika po sobě jdoucích vyučovacích hodinách, naopak, úlohy je možné začleňovat do výuky průběžně jako opakování. Některé úlohy a pracovní listy mohou též posloužit k aktivizaci žáků, k odlehčení hodiny apod.

Kromě metodických pokynů popisujících práci s uvedenými úlohami přikládáme jako přílohu sadu pracovních listů. K úlohám z pracovních listů je v textu uvedeno podrobné řešení.

4.2 Metodické pokyny

Cílová skupina: žáci 8. ročníku základní školy a odpovídající ročníky víceletých gymnázií

Cíle materiálu: upevnění dovednosti používat souřadnice bodu, zopakování vlastností rovinných útvarů, propedeutika pojmu vektor

Potřebný čas na aplikaci materiálu: tři až pět vyučovacích hodin dle schopností žáků (tři hodiny spíše na víceletém gymnáziu; více hodin v případě, že se žáci se soustavou souřadnic teprve seznamují, nebo dle potřeby)

Předpokládáme, že žák již byl seznámen s principy kartézské soustavy souřadnic, orientací souřadnicových os a se zápisem souřadnic bodu. Toto téma bývá zpravidla vyučováno v souvislosti se zavedením pojmu funkce. V praxi se setkáváme s tím, že žáci často zaměňují osy x a y, mají problém zejména s určením souřadnic bodů ležících na některé souřadnicové ose a obecně uchopují nové poznatky pouze formálně – nedokáží je následně propojit se znalostmi z ostatních oblastí matematiky. Na střední škole na toto téma přímo navazuje analytická geometrie v rovině, která je vhodnou příležitostí k propojení algebry a syntetické geometrie, avšak pro žáky se stává spíše soustavou vzorců a pravidel, které se učí nazpaměť a bez souvislostí. Předkládaný materiál je inspirací k tomu, jak lze již na základní škole po prvním seznámení s kartézskou soustavou souřadnic toto téma provázat s dalšími oblastmi matematiky, nejen s funkcemi.

4.3. První vyučovací hodina

V úvodu hodiny připomeneme kartézské souřadnice a pravidla pro zápis souřadnic bodu. Následně se žáky procvičujeme úlohy, v nichž nejprve jen zobrazujeme jednotlivé body nebo určujeme souřadnice zobrazených bodů. Dalším krokem je zařazení úloh, které souvisí s planimetrií. Žáci musí kromě nových poznatků o kartézské soustavě souřadnic využít také poznatky starší (čtverec, obdélník a jejich obvod, obsah a další charakteristické vlastnosti).

4.3.1 Připomenutí základních pojmů

Vhodnou motivací pro zápis bodů pomocí souřadnic je možnost, jak umístění bodů či objektů přesně a jednoznačně matematicky popsat. Tento systém je běžně používaný v praxi, máme-li k dispozici, můžeme ukázat žákům třeba geometrický plán nějaké budovy/pozemku. Žáci se již pravděpodobně setkali s GPS souřadnicemi, lze je upozornit, že se jedná o obdobnou záležitost.

Doporučujeme, aby učitel u tabule připomenul pravidla pro znázornění bodu v soustavě souřadnic (předpokládáme, že žák již pojem kartézská soustava souřadnic zná ze 7. ročníku; pokud ne, je třeba věnovat více času úvodnímu procvičení, než přejdeme k aktivitám 3 a 4). Lze vést rozhovor s žáky, popřípadě vyzvat žáky k aktivní činnosti u tabule. Činnost učitele, příklady kladených otázek, správné odpovědi a časté chyby žáků včetně několika metodických doporučení zachycuje tabulka 4.1.

Tabulka 4.1: Připomenutí pojmu *souřadnice bodu*

Činnost učitele	**Otázky/pokyny učitele**	**Správné odpovědi**	**Obvyklé chyby/doporučení**
1) Zakreslí osový kříž.	Jak značíme osy soustavy souřadnic? Která je která?	x, y	žáci zamění osy; osy je třeba v obrázku popsat
	Jak velký úhel svírají?	90°/jsou na sebe kolmé	pravý úhel lze vyznačit v obrázku
	Jak se nazývá jejich průsečík?	počátek soustavy souřadnic	doporučujeme označit O
	Jaké má počátek souřadnice? Která souřadnice je x-ová a která je y-ová?	[0; 0]	žáci zamění osy
2) Nakreslí na obou osách obrazy několika celých čísel (např. od –4 do 4).	Kterým směrem nanášíme kladná čísla na osu x? (Podobně pro záporná čísla a analogicky pro osu y.)	od počátku doprava	žáci zamění směr kladné a záporné poloosy

3) Vyznačí obraz čísla 1 na obou osách.	Vyznačte další obrazy čísel na osách.		lze vyzvat některého žáka, aby znázornil několik čísel na tabuli
4) Vyznačí zřetelně (včetně pomocných kolmic k souřadnicovým osám) obraz bodu *A*[2; 3].	Jakou má bod *A* *x*-ovou souřadnici?	2	doplňujícími otázkami („opravdu 2?", „jak to poznáme?") ověřujeme porozumění i u žáků, kteří nereagují
	Jakou má bod *A* *y*-ovou souřadnici?	3	zapíšeme souřadnice bodu *A* na tabuli a nad příslušná čísla napíšeme „*x*" a „*y*"
5) Zapíše na tabuli název a souřadnice dalšího bodu, např. *B*[4; 1].	Jaká je *x*-ová souřadnice bodu *B*? (Podobně pro *y*.)	4	žáci zamění souřadnice
	Zakreslete daný bod *B* do soustavy souřadnic.		žáci zakreslí bod [1; 4]; nepopíší bod; nenaznačí pomocné kolmice a zároveň načrtnou bod velmi nepřesně; je třeba procházet třídu a kontrolovat jejich práci; můžeme vyzvat nějakého žáka k zakreslení bodu na tabuli

Na odpovědi žáků je třeba adekvátně reagovat, odpovědi korigovat, opravovat a upřesňovat. Je-li třeba, společně se třídou znázorníme více různých bodů (opakujeme činnost učitele 4 a 5, přidáváme záporné a nulové souřadnice). Ve chvíli, kdy lze pozorovat, že si všichni žáci dostatečně připomněli souvislost mezi zapsanými souřadnicemi bodu a jeho znázorněním v soustavě souřadnic, můžeme přejít k dalším aktivitám.

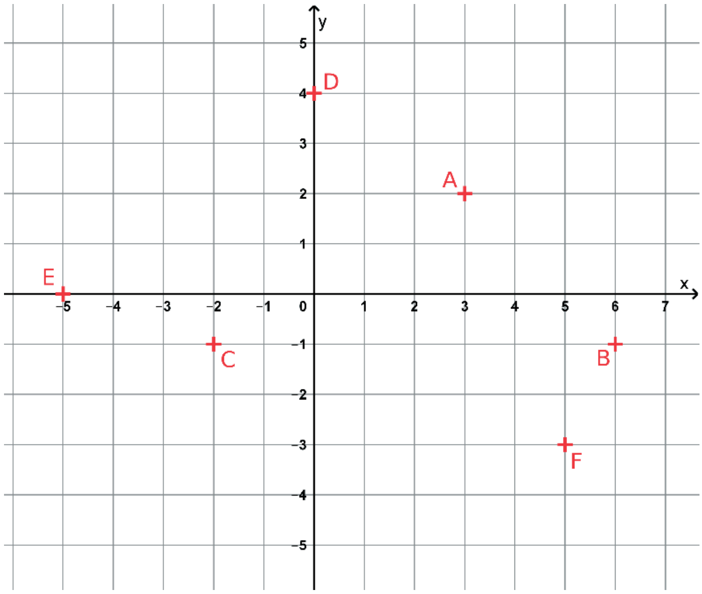
4.3.2 Procvičení souřadnic bodů

Pomocí druhé aktivity ověříme, zda skutečně všichni žáci chápou správně práci s body v souřadnicovém systému. Žákům rozdáme pracovní list *Souřadnice bodu* (příloha A) a necháme jim čas na samostatné vyřešení obou úloh (čas je třeba nastavit vhodně dle schopností žáků, obvykle stačí cca 10 minut).

V první úloze pracovního listu žáci mají za úkol zakreslit do připravené kartézské soustavy souřadnic body *A*[3; 2], *B*[6; –1], *C*[–2; –1], *D*[0; 4], *E*[–5; 0], *F*[5; –3]. Ve druhé úloze naopak mají uvést souřadnice již zakreslených bodů a dále některé z těchto souřadnic porovnat. Žákům je třeba vysvětlit použité značení: *x*/*y* označuje *x*-ovou/*y*-ovou souřadnici a dolní index určuje bod, jehož souřadnice nás zajímá.

Poté společně s žáky úlohy zkontrolujeme. Buď vyvoláváme jednotlivé žáky k tabuli, aby postupně dané body zakreslili (je třeba jim předkreslit soustavu souřadnic s vhodně zvolenou jednotkou), nebo s nimi vedeme rozhovor a zakreslujeme body dle jejich pokynů. V obou případech opakovaně vyzýváme žáky k tomu, aby se vyjádřili, zda s daným řešením souhlasí, či zda navrhují řešení jiné a proč. Zjišťujeme tak, kolik žáků má úlohy správně a pokud někdo udělal chybu, tak v čem spočívá.

Řešení úlohy 1 uvádíme na obr. 4.1, řešení úlohy 2 je následující: $Q[2; 4]$, $R[6; -3]$, $S[-4; 2]$, $T[-2; -5]$, $U[6; 2]$, $V[-4; -2]$, $W[2; -2]$; doplněné znaky: a) =, b) >, c) =, d) <, e) >, f) <.



Obr. 4.1: Řešení úlohy 1 z pracovního listu Souřadnice bodu

Pro zakreslování/znázorňování bodů před třídou lze využít různé pomůcky. Můžeme použít interaktivní tabuli, na níž si zobrazíme osy včetně jednotkové mřížky. Požadované body pak zakreslujeme rovnou do této mřížky. Je vhodné vyznačit vždy pomocné čáry vedoucí od zobrazených bodů kolmo k osám x a y, aby si žáci uvědomili, jak mohou bod zřetelně zakreslit i v případě, že nemají mřížku předkreslenou. Pokud máme k dispozici magnetickou tabuli, můžeme si soustavu souřadnic včetně mřížky připravit na tuto tabuli a jednotlivé body pak znázorňovat pomocí magnetů. Oba výše uvedené způsoby jsou výhodné ve chvíli, kdy žák udělá chybu a je třeba ji opravit. Pokud však žádnou z uvedených pomůcek k dispozici nemáme, vystačíme si i s obyčejnou tabulí. Zde je však třeba pečlivě, ideálně s pomocí pravítka, konstruovat osy i zakreslovat jednotlivé body.

Typickými žákovskými chybami v těchto úlohách jsou, jak již bylo naznačeno v tabulce 1, záměna souřadnic x a y a záměna orientace os. Při porovnávání souřadnic ve druhé úloze se mohou objevit žáci, kteří budou souřadnice vnímat v absolutní hodnotě, jako vzdálenosti od počátku (díky čemuž uvedou například špatně, že $x_V = y_Q$).

4.3.3 Pracovní list *Čtverec a obdélník*

V předchozí aktivitě si žáci připomněli a procvičili zápis souřadnic bodu a jejich význam pro znázornění bodu v rovině. Nyní tuto dovednost postupně začneme propojovat s poznatky z dalších témat. Cílem třetí aktivity je procvičit nejen uvedenou dovednost, ale také ji provázat s dalšími oblastmi matematiky, aby ji žáci začali vnímat jako přirozenou, nikoliv jako izolovanou, součást znalost. Zároveň tím v dalších úlohách zopakujeme některé vlastnosti rovinných útvarů.

Žákům rozdáme pracovní list *Čtverec a obdélník* (příloha B) a necháme je samostatně pracovat. Pokud víme, že máme ve třídě slabší žáky, kteří si sami s úlohami neporadí, můžeme žáky roztřídit do výkonnostně smíšených skupin a nechat je řešit úlohy ve skupinách. Na vyřešení pracovního listu žáci obvykle potřebují asi 15 až 20 minut. Poté můžeme buď pracovní listy vybrat a samostatnou práci žáků opravit a ohodnotit, nebo listy s žáky společně ihned projdeme a zkontrolujeme. Pro druhou variantu je vhodné mít připravené řešení, které promítneme pomocí dataprojektoru.

První úloha: Jsou dány body *A*[4; −2] a *C*[4; 4]. Úsečka *AC* je úhlopříčkou čtverce. Narýsujte do soustavy souřadnic (dole na stránce) čtverec *ABCD*; zapište souřadnice bodů *B* a *D*; zapište souřadnice středu *S* čtverce *ABCD*; vypočítejte obsah čtverce *ABCD*.

Řešení: Sestrojený čtverec *ABCD* je na obrázku 4.2. Vrcholy lze popsat po směru i proti směru hodinových ručiček (pro souřadnice bodů *B* a *D* jsou tedy dvě řešení), obvyklejší je však popis proti směru hodinových ručiček, tedy bod *B* má souřadnice [7; 1], bod *D*[1; 1]. Střed *S* čtverce *ABCD* má souřadnice [4; 1]. Obsah lze vypočítat několika způsoby:

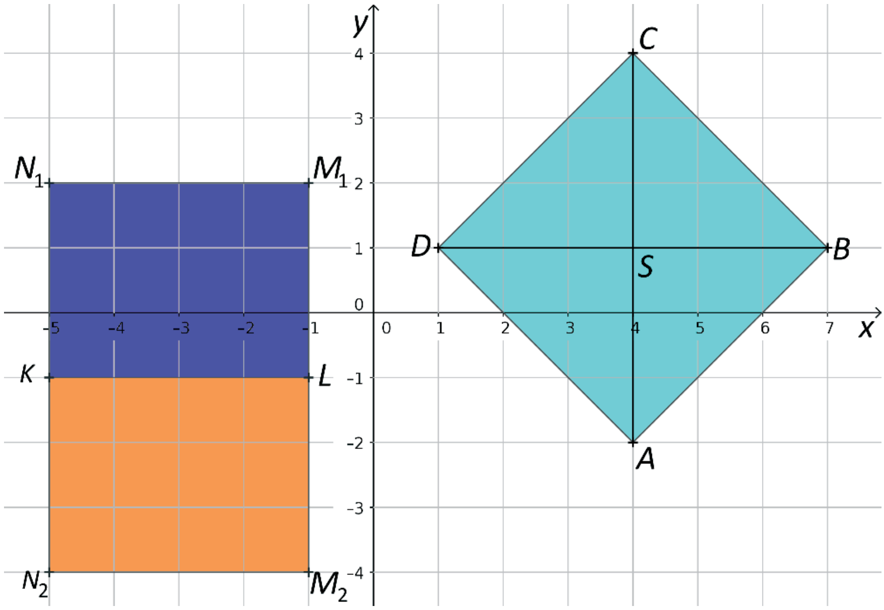
- určením počtu celých jednotkových čtverečků a „půlčtverečků“;
- určením rozdílu obsahu opsaného čtverce o straně 6 cm a čtyř pravoúhlých trojúhelníků o odvěsnách 3 cm;
- rozřezáním čtverce pomocí jeho úhlopříček na čtyři pravoúhlé trojúhelníky a jejich přeskládáním do obdélníku o stranách 6 cm a 3 cm;
- výpočtem podle vztahu „obsah čtverce je roven polovině součinu délek jeho úhlopříček“;
- vypočtením délky strany daného čtverce pomocí Pythagorovy věty a dosazením do známého vztahu „obsah čtverce je roven druhé mocnině délky jeho strany“

Správným řešením je obsah S = 18 cm^2. Lze pozorovat, jaký postup žáci preferují a jakých chyb se v závislosti na zvoleném postupu dopouštějí. Můžeme je vyzvat, aby hledali více různých postupů a tak si ověřili správnost svého řešení. Je možné, že s Pythagorovou větou nebo se vztahem pro obsah čtverce v závislosti na délce úhlopříček zatím nebyli ve škole seznámeni, první tři postupy by však žáci 8. ročníku zvládnout měli.

V rámci pilotáže byla tato úloha zadána žákům různých ročníků víceletého gymnázia, mladší žáci úlohu řešili nejčastěji jedním z prvních tří uvedených postupů a správně, naopak starší žáci se snažili dosazovat do známých vztahů a častěji chybovali (Moravcová & Kaňková, 2018b).

Druhá úloha: Jsou dány body *K*[−5; −1] a *L*[−1; −1]. Úsečka *KL* je stranou obdélníku *KLMN*. Sestrojte jeho zbývající vrcholy, jestliže víte, že obsah obdélníku je 12 cm^2. Najděte všechna řešení a do obrázku zapište souřadnice nalezených bodů *M, N*.

Řešení: Tato úloha má 2 řešení (obr. 4.2). Souřadnice hledaných bodů jsou: M_1[−1; 2], N_1[−5; 2], nebo M_2[−1; −4], N_2[−5; −4]. Na druhé řešení žáci často zapomínají, neboť jsou nesprávně fixováni jen na popis vrcholů proti směru hodinových ručiček. Tuto fixaci však nedoporučujeme podporovat, neboť bychom narazili na komplikace v dalším učivu (osová souměrnost, určení počtu řešení konstrukční úlohy, popis stěn těles).



Obr. 4.2: Řešení úloh z pracovního listu Čtverec a obdélník

4.3.4 Množiny bodů dané vlastnosti (obtížnější úlohy)

Tato aktivita se hodí pro zabavení rychlejších a šikovnějších žáků, s celou třídou se v rámci jedné vyučovací hodiny spolu s předchozími aktivitami na základě našich zkušeností již patrně nestihne. Jedná se o obtížnější úlohy, které můžeme zadat jednotlivcům, skupině žáků i jako domácí práci celé třídě. Jedná se o sérii problémových úloh, v nichž požadujeme po žácích zakreslit příslušné body do kartézské soustavy souřadnic, popřípadě určovat vlastnosti souřadnic znázorněných bodů. Body však nejsou zadány jednoduše jako v předchozích aktivitách.

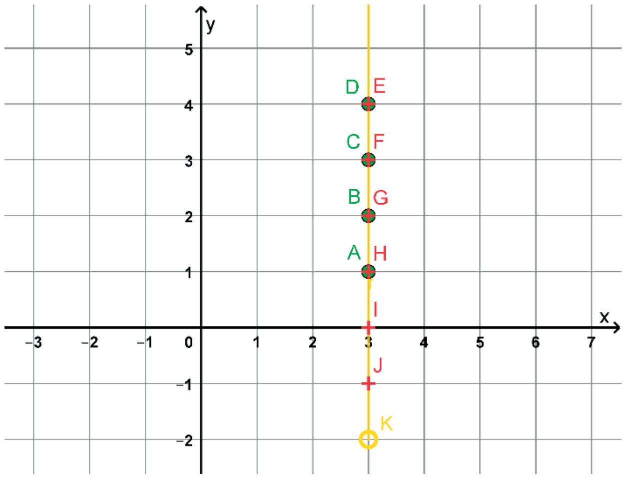
První úloha: Jsou dány body: *A*[–3; 2], *S*[0; 2]. Zakreslete a zapište souřadnice:
a) bodu *B* tak, aby *S* byl středem úsečky *AB*;
b) bodu *C* tak, aby *A* byl středem úsečky *SC*;
c) bodu *M*, který je středem úsečky *AS*;
d) bodů *K*, *L*, které leží na přímce *AS* a jsou od bodu *S* stejně daleko, jako je bod *M* od bodu *C*.

Řešení: *B*[3; 2], *C*[–6; 2], *M*[–1,5; 2], *K*[–4,5; 2], *L*[4,5; 2].

Druhá úloha: Uvedenou barvou zakreslete všechny body, jejichž x-ová souřadnice je 3 a zároveň y-ová souřadnice je větší než –2 a zároveň je rovna

a) přirozenému číslu menšímu než 5 (zelená);
b) celému číslu menšímu než 5 (červená);
c) libovolnému reálnému číslu (žlutá).

Řešení: a) body A, B, C, D; b) body E, F, G, H, I, J, přičemž první čtyři z nich splývají s řešením a); c) řešením je každý bod žlutě znázorněné polopřímky vyjma počátečního bodu K (obr. 4.3).



Obr. 4. 3: Řešení druhé úlohy

Třetí úloha: Zakreslete úsečku AB, jestliže: $A[-1; 1]$, $B[-1; 3]$. Zapište, co platí pro libovolný bod C, který leží na úsečce AB (doplňte vhodné znaky =, <, ≤, >, ≥):

x_C ….. –1 y_C ….. 1 y_C ….. 3

Řešení: $x_C = -1$, $y_C \geq 1$, $y_C \leq 3$.

Čtvrtá úloha: Zakreslete obdélník $KLMN$, jestliže: $K[-1; -2]$, $L[5; -2]$, obvod obdélníku je 18 a y-ová souřadnice bodu M je kladná. Zapište, co platí pro libovolný bod Q obdélníku $KLMN$ (doplňte vhodné znaky =, <, ≤, >, ≥):

x_Q ….. –1 x_Q ….. 5 y_Q ….. –2 y_Q ….. 1

Řešení: Bod M má souřadnice [5; 1], bod $N[-1; 1]$. Pro souřadnice bodu Q platí: $x_Q \geq -1$, $x_Q \leq 5$, $y_Q \geq -2$, $y_Q \leq 1$.

Předložené úlohy čtvrté aktivity patří k obtížnějším. Jejich obtížnost je postupně gradována – začínáme izolovanými body, postupně pracujeme s celočíselnými, racionálními a nakonec s reálnými souřadnicemi. Podle toho, zda a jak se žákům daří tyto úlohy řešit, může učitel sám vymýšlet jejich obměny – snazší i obtížnější.

První úlohu lze ztížit umístěním úsečky *AS* do soustavy souřadnic „šikmo“. Ve druhé úloze se můžeme ptát, jak se nazývá objekt, který je zakreslen žlutou barvou (polopřímka). Zde je již pro žáky obtížná představa nekonečna, všechny požadované body vlastně nelze zakreslit, můžeme si je jen představit. Různými obměnami zadání můžeme po žácích požadovat zakreslení úseček či přímek. Ve třetí a čtvrté úloze si žáci uvědomují existenci vnitřních bodů daných útvarů a jejich nekonečný počet.

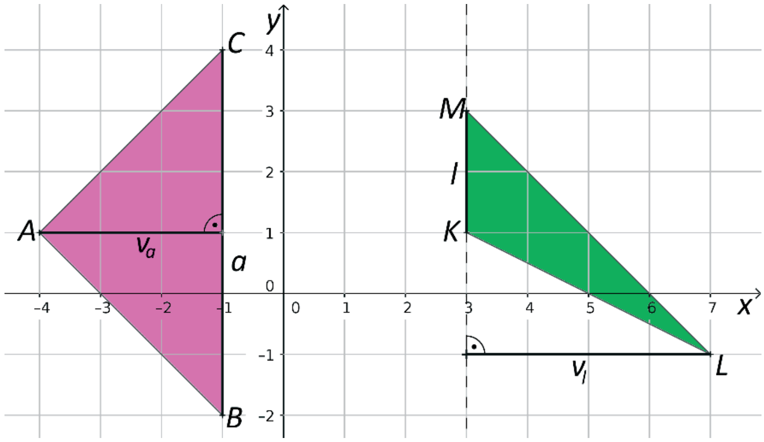
4.4 Druhá vyučovací hodina

Další vyučovací hodina přímo navazuje na předchozí. Pracujeme se souřadnicemi bodů, zároveň však toto téma aktivně propojujeme s dříve získanými poznatky z oblasti planimetrie. Procvičujeme tak nadále zakreslování bodů daných souřadnicemi a naopak určování souřadnic již zakreslených bodů, zároveň však opakujeme obvody a obsahy rovinných útvarů, jejich vlastnosti i shodná zobrazení.

4.4.1 Pracovní list *Trojúhelníky*

Žákům rozdáme pracovní list *Trojúhelníky* (příloha C) a necháme je samostatně pracovat. Pokud víme, že máme ve třídě žáky, kteří si sami s úlohami neporadí, můžeme žáky rozdělit do výkonnostně smíšených skupin a nechat je řešit úlohy ve skupinách. Na vyřešení pracovního listu žáci obvykle potřebují asi 20 až 25 minut. Poté můžeme buď pracovní listy vybrat a samostatnou práci žáků opravit a ohodnotit, nebo listy s žáky společně ihned projdeme a zkontrolujeme. Pro druhou variantu je vhodné mít připravené řešení, které promítneme pomocí dataprojektoru.

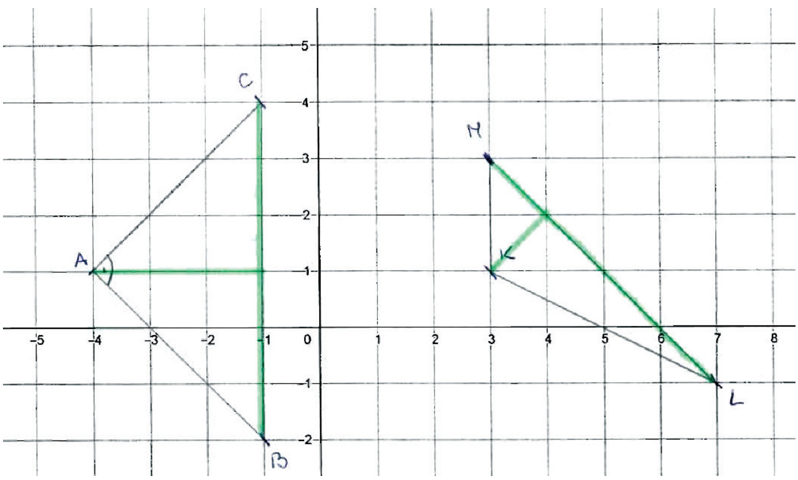
Úkolem žáků v pracovním listu je sestrojit dva trojúhelníky, *ABC* a *KLM*, jejichž vrcholy jsou zadány pomocí souřadnic: $A[-4; 1]$, $B[-1; -2]$, $C[-1; 4]$, $K[3; 1]$, $L[7; -1]$, $M[3; 3]$. Poté mají žáci určit vlastnosti obou trojúhelníků (tj. rozhodnout o každém trojúhelníku, zda je např. rovnostranný, pravoúhlý apod. – pokud žáci nepochopí zadání, je třeba jej dovysvětlit) a vypočítat obsah obou trojúhelníků. Výpočtu obsahu předchází pokyn: „V obou trojúhelnících barevně vyznačte a popište stranu a k ní příslušnou výšku, kterou můžete co nejvýhodněji použít k výpočtu obsahu trojúhelníku.“ Cílem je přimět žáky k zamyšlení se nad tím, u kterých stran a výšek jsou schopni snadno určit jejich rozměr.



Obr. 4.4: K řešení pracovního listu Trojúhelníky

Řešení (obr. 4.4)**:** Trojúhelník *ABC* je rovnoramenný a pravoúhlý. Pro výpočet obsahu je výhodné pracovat se stranou a a s příslušnou výškou v_a, neboť tyto úsečky jsou v soustavě souřadnic umístěny svisle, resp. vodorovně. Obsah trojúhelníku *ABC* je roven 9 cm^2. Trojúhelník *KLM* je různostranný a tupoúhlý. Pro výpočet obsahu je výhodné pracovat se stranou l a s příslušnou výškou v_l, neboť tyto úsečky jsou v soustavě souřadnic umístěny svisle, resp. vodorovně. Obsah trojúhelníku *KLM* je roven 4 cm^2.

Skutečnost, že je trojúhelník *ABC* pravoúhlý, může vést některé žáky k nápadu pracovat při výpočtu obsahu s jeho odvěsnami. Pokud však ještě neznají Pythagorovu větu, nemohou délku odvěsen vypočítat. S objevením vhodné strany a příslušné výšky v tupoúhlém trojúhelníku mají žáci zpravidla potíže (Moravcová & Kaňková, 2018a, 2018b). Často zkouší použít výšku ke straně k, neboť ta jediná leží uvnitř trojúhelníku (obr. 4.5).



Obr. 4.5: Žákovské řešení pracovního listu Trojúhelníky, ukázka volby nevhodné výšky v tupoúhlém trojúhelníku

U trojúhelníku *ABC* lze obsah snadno vypočítat také prostým určením počtu jednotkových čtverečků a „půlčtverečků“. Trojúhelníku *KLM* můžeme opsat čtverec *PLQM* o straně 4 cm a od jeho obsahu odečíst obsahy pravoúhlých trojúhelníků *QLK* a *LQM*, jejichž výpočet je snadný.

4.4.2 Další úlohy

Pracovní listy *Čtverec a obdélník* a *Trojúhelníky* předkládají úlohy, které lze považovat za elementární. Podobné úlohy lze však s ohledem na znalosti a schopnosti žáků gradovat, zařadit další rovinné útvary a shodná zobrazení. V rámci druhé aktivity předkládáme pro inspiraci několik úloh v různých stupních obtížnosti. V další části vyučovací hodiny můžeme, podle času, nechat žáky řešit alespoň vybrané z následujících úloh. Popřípadě lze aktivitu v zájmu zpestření pojmout jako soutěž týmů.

První úloha: Určete celočíselné souřadnice bodu *C* tak, aby obsah rovnoramenného trojúhelníku *ABC* byl 6, jestliže:

a) *A*[3; –3], *B*[3; 1];
b) *A*[–4; –2], *B*[0; –3,5].

Řešení: a) úloha má dvě řešení – C_1[0; –1], C_2[6; –1]; b) úloha má dvě řešení – C_1[–4; –5], C_2[4; –2]. V podúloze b) bývá pro žáky obtížné objevit druhé řešení, trojúhelník s vrcholem C_2 je tupoúhlý. Celkově může být část b) obtížnější než část a), neboť žáci nejprve hledají vrchol *C* takový, že *AB* je základnou trojúhelníku. Pokud dlouho nemohou žádné řešení najít, je možné jim poradit, že *AB* může být i ramenem rovnoramenného trojúhelníku.

Druhá úloha: Je dán trojúhelník *ABC*, kde *A*[3; 2], *B*[5; 1], *C*[4; 5]. Zapište souřadnice vrcholů trojúhelníku *A′B′C′*, který získáme:

a) jako obraz trojúhelníku *ABC* v osové souměrnosti s osou *y*;
b) jako obraz trojúhelníku *ABC* ve středové souměrnosti se středem v počátku soustavy souřadnic;
c) jako obraz trojúhelníku *ABC* ve středové souměrnosti se středem v bodě *S*[3; 3].

Řešení: a) *A′*[–3; 2], *B′*[–5; 1], *C′*[–4; 5]; b) *A′*[–3; –2], *B′*[–5; –1], *C′*[–4; –5]; c) *A′*[3; 4], *B′*[1; 5], *C′*[2; 1]. Osová souměrnost bývá pro žáky zpravidla snazší než středová. Pokud se s osovou nebo středovou souměrností delší dobu nesetkali, je vhodné jim nejprve připomenout pravidla pro zobrazení bodu v obou souměrnostech. S žáky můžeme následně diskutovat, co obecně platí pro souřadnice zobrazovaných bodů (při zobrazení v osové souměrnosti s osou *y* se *x*-ová souřadnice zobrazovaného bodu mění na opačnou a jeho *y*-ová souřadnice se nemění; ve středové souměrnosti se středem v počátku soustavy souřadnic se mění na opačné obě souřadnice zobrazovaných bodů; ve středové souměrnosti se středem v bodě [3; 3] získáme souřadnice obrazu bodu jako rozdíl čísla 6 a příslušné původní souřadnice).

Třetí úloha: Jsou dány body *A*[0; 0], *B*[4; 0], *D*[1; 2]. Zapište souřadnice bodu *C* tak, aby čtyřúhelník *ABCD* byl:

a) rovnoramenný lichoběžník se základnou AB;
b) rovnoběžník;
c) lichoběžník se základnou AB o obsahu 10.

Řešení: a) $C[3; 2]$; b) $C[5; 2]$; c) $C[7; 2]$. Touto úlohou opakujeme vlastnosti rovnoběžníku a (rovnoramenného) lichoběžníku. Lichoběžník, který vychází jako řešení podúlohy c), je tvarově netypický a jeho objevení může činit žákům potíže. Setkali jsme se i s názorem žáka, že takový útvar není lichoběžníkem.

Čtvrtá úloha: Vypočítejte obsahy čtyřúhelníků z předchozí úlohy – a), b). Který ze všech tří čtyřúhelníků z předchozí úlohy má největší obvod, a který má nejmenší obvod? Zdůvodněte.

Řešení: Obsah rovnoramenného lichoběžníku je 6, obsah rovnoběžníku je 8. Největší obvod má útvar c), nejmenší útvar a). Zdůvodnění může být podloženo porovnáním délek stran zadaných čtyřúhelníků. Strany a a d mají všechny tři útvary shodné. První dva útvary se liší pouze v délce strany c, v rovnoběžníku je tato strana delší než v rovnoramenném lichoběžníku. Obvod rovnoběžníku je tedy větší. Poslední útvar má stranu c nejdelší a navíc má delší stranu b než první dva útvary, proto má největší obvod. Pokud žáci znají Pythagorovu větu, mohou obvody všech tří útvarů vypočítat.

Čtvrtá úloha: Sestrojte kružnici k se středem $S[1; 1]$ a poloměrem 5. Zapište co nejvíce bodů s celočíselnými souřadnicemi, které leží na kružnici k.

Řešení: Takových bodů je celkem 12 ([6; 1], [5; 4], [4; 5], [1; 6], [–2; 5], [–3; 4], [–4; 1], [–3; –2], [–2; –3], [1; –4], [4; –3], [5; –2]). Žáci snadno objeví krajní body vodorovného a svislého průměru. Další body naleznou díky přesnému rýsování, že tyto body skutečně na kružnici leží, mohou ověřit Pythagorovou větou. Pokud ji zatím neznají, tak lze užít k sestrojení kružnice program GeoGebra.

4.4.3 Vlastní úlohy žáků

Je možné, že první a druhou aktivitou zcela vyčerpáme čas ve druhé hodině. Pokud však nějaký prostor do konce vyučovací hodiny zbývá, vyzveme žáky, aby každý vymyslel svou úlohu (obdobnou některé úloze z předchozí aktivity). Můžeme specifikovat okruh úloh tím, že určíme útvar a vlastnost, například:

a) trojúhelník, obsah;
b) obdélník, úhlopříčky;
c) lichoběžník, obsah;
d) čtverec, obvod.

S vymyšlenými úlohami lze následně naložit různě, podle množství zbývajícího času do konce vyučovací hodiny. Můžeme je od žáků vybrat, následně z nich vybereme ty nejzajímavější a sestavíme z nich zadání, které v některé z dalších hodin předložíme žákům na úvod jako opakování. Je-li času dostatek, tak ještě v hodině necháme žáky, aby si zadání ve dvojicích navzájem vyměnili a snažili se vyřešit úlohu spolužáka. Poté si řešení zase ve dvojicích vrátí a autor každé úlohy se pokusí spolužákovi jeho řešení opravit. Společně pak diskutujeme případné nejasnosti.

4.5 Třetí vyučovací hodina

Třetí vyučovací hodina je zaměřena na propedeutiku pojmu vektor. V matematice se s tímto pojmem žáci setkávají až na střední škole. Na procvičení nemají dostatek času a ze zkušenosti víme, že jejich poznatky jsou často jen formální – souřadnice vektoru mechanicky počítají jako rozdíl souřadnic příslušných bodů, avšak nemají vybudovanou geometrickou představu pojmu vektor. Přitom s tímto pojmem lze pracovat již na základní škole, a to zcela intuitivně, slovo „vektor" vůbec nemusíme vyslovit. Pokud použijeme soustavu souřadnic, stačí specifikovat pohyb ve směru osy x a pohyb ve směru osy y a vhodně jej zapsat, ideálně nejprve nějakým způsobem, který již žáci znají.

V následujícím textu nabízíme jeden z možných způsobů zápisu pohybu. Pracujeme s jednoduchými algebraickými výrazy, které bývají v 8. ročníku ZŠ vyučovány. Žáci se díky tomu nejen přirozeně setkají s vektory, ale propojí si zápis mnohočlenů (tedy pro některé z nich „nudné počítání") s geometrií. Aktivita jim umožní výrazy s neznámou konkrétně reprezentovat.

4.5.1 *Procházky* zapsané pomocí výrazů

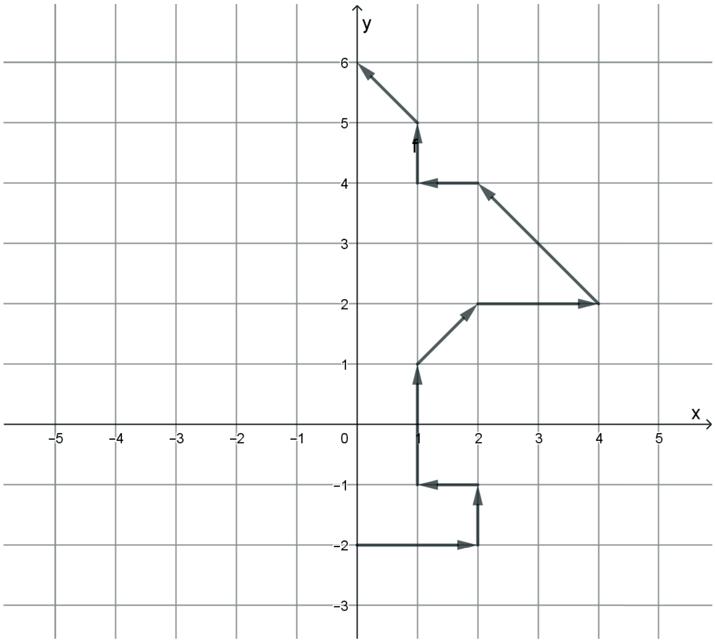
Pro první aktivitu využijeme první stranu pracovního listu *Procházky soustavou souřadnic* (příloha D). Tato strana obsahuje dvě úlohy. První z nich je nácviková, druhá slouží k ověření, zda žáci nový princip zápisu pohybu pochopili.

První úloha: Na obrázku (obr. 4.6) je zakreslena procházka po čtvercové síti s počátkem v bodě [0; −2], kterou bychom zapsali takto: +2x; +y; −x; +2y; +x + y; +2x; −2x + 2y; −x; + y; −x + y. Dokreslete do obrázku procházku se stejným počátečním bodem tak, aby byla osově souměrná s již zakreslenou trasou podle osy y. Tuto novou procházku zapište. Co vám obrázek připomíná?

Úkolem žáků je nejprve se v obrázku zorientovat, pochopit systém zápisu „procházky". K tomu jim jsou nápomocny šipky, které naznačují směr pohybu. V další fázi zakreslují trasu v osové souměrnosti. Nejtěžší fází je pro žáky zápis nové procházky. Otázka v závěru zadání úlohy slouží k zpestření hodiny a umožňuje i slabším žákům se realizovat.

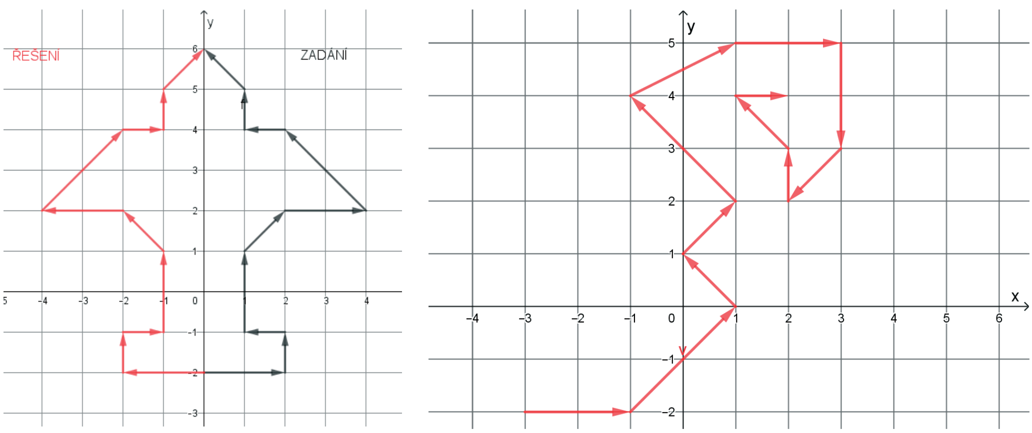
Zápis osově souměrné procházky (obr. 4.7 vlevo) je následující:$-2x$; $+y$; $+x$; $+2y$; $-x + y$; $-2x$; $+2x + 2y$; $+x$; $+y$; $+x + y$.

Aktivita byla vyzkoušena s žáky různého věku od 7. ročníků základní školy výše (Moravcová & Kaňková, 2018b). S pochopením zápisu procházky většina z nich neměla problém. Někteří sami odhalili, že stačí ve výrazech změnit znaménko u členu s proměnnou x. Výsledný obrazec žákům nejčastěji připomínal letadlo, ptáka, vlaštovku apod.



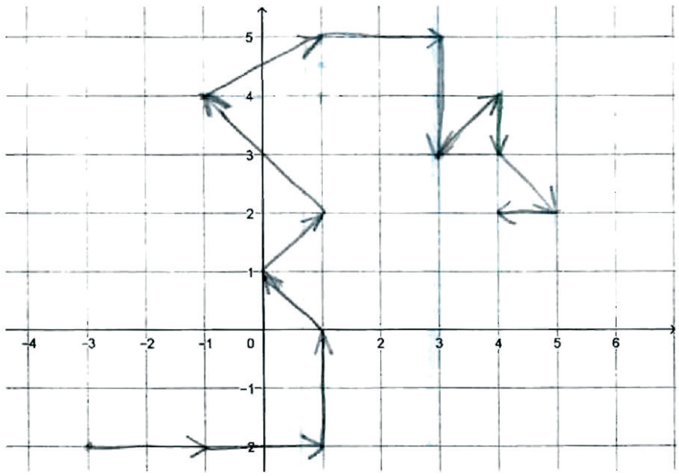
Obr. 4.6: Zadání první procházky

Druhá úloha: Zakreslete procházku z počátečního bodu [−3; −2]: $+2x$; $+2x + 2y$; $-x + y$; $+x + y$; $-2x + 2y$; $+2x + y$; $+2x$; $-2y$; $-x - y$; $+y$; $-x + y$; $+x$.



Obr. 4.7: Procházky – řešení první úlohy (vlevo), řešení druhé úlohy (vpravo)

Tato úloha slouží k ověření, že žáci v předchozí úloze správně pochopili zápis procházky. Ve druhé úloze (na rozdíl od očekávání žáků) nevychází žádný zajímavý obrazec (obr. 4.7 vpravo), což některé žáky zpravidla mate (obr. 4.8) a musí se znovu vrátit k úloze předchozí, aby si naplno uvědomili pravidla zápisu.



Obr. 4.8: Ukázka chybného žákovského řešení druhé úlohy z pracovního listu Procházky soustavou souřadnic

Obě úlohy se osvědčilo zadat jako samostatnou práci, neboť ve skupinkách se občas může schovat žák, který zápis nepochopil. Po první úloze, která žákům zabere přibližně 10 minut, je vhodné s žáky probrat, co objevili, jak zápis funguje. Můžeme také do soustavy souřadnic na tabuli načrtnout jednoduchou procházku skládající se třeba jen ze dvou až tří vektorů a ověřit, že žáci dokáží tuto procházku zapsat dříve, než se pustí do řešení druhé úlohy. Čas na řešení druhé úlohy se u jednotlivých žáků, s nimiž byla aktivita vyzkoušena, výrazně lišil. Pohyboval se v rozmezí cca 3 až 12 minut. Rychlejším žákům můžeme dát mezitím k řešení obdobné úlohy z dalšího pracovního listu (viz příloha E, včetně řešení), které jsou vhodné zejména na předvánoční hodinu.

4.5.2 *Procházky* zapsané v souřadnicích

Druhá strana pracovního listu *Procházky soustavou souřadnic* (příloha D) obsahuje tytéž úlohy, avšak zapsané v podstatě pomocí vektorů. Jednotlivé části procházky jsou zapsány pomocí uspořádaných dvojic čísel, kde první číslo je x-ovou a druhé y-ovou souřadnicí vektoru. Pro odlišení od zápisu souřadnic bodů jsou použity kulaté závorky.

S těmi to úlohami lze pracovat různým způsobem. Po provedení předchozí aktivity můžeme žáky vyzvat, aby sami zkusili vymyslet nějaký jiný, stručnější zápis procházky. Na základě našich zkušeností je pravděpodobné, že některého žáka napadne právě zápis pomocí uspořádaných dvojic. Poté žáky necháme vyřešit připravené úlohy. Pokud máme podezření, že již jen kopírují první stránku pracovního listu a nad novým zápisem příliš nepřemýšlí, můžeme druhou stranu pracovního listu použít pouze jako ukázku a žákům zadat úlohy 3 a 4 z pracovního listu E.

S kreslením a zápisem procházek máme pozitivní zkušenost nejen s žáky základní školy, ale také s žáky vyšších ročníků střední školy, kteří si díky těmto úlohám vytvořili vizuální představu vektoru.

4.5.3 René Descartes

Poslední aktivita je již jen procvičením pohybu v kartézské soustavě souřadnic pomocí vektorově zapsané procházky, zároveň – díky tomu, že je zadána hravou formou – přináší žákům odreagování a také informaci z mezipředmětové oblasti.

Žákům rozdáme předkreslenou soustavu souřadnic, v níž je vyznačeno několik bodů (příloha F). Úkolem je zakreslit dvě procházky zadané pomocí vektorů (lze pochopitelně převést na zápis pomocí algebraických výrazů), které začínají v počátku soustavy souřadnic. Pokud žáci zapíší písmena (názvy bodů) v tom pořadí, jak jimi prošli, získají jméno a příjmení (pochopitelně bez diakritiky, tu můžeme posléze upřesnit) matematika René Descarta.[1]

4.6 Závěr

Materiál předkládá sadu úloh, které byly vyzkoušeny s žáky různých ročníků druhého stupně ZŠ i víceletého gymnázia včetně vyšších ročníků gymnázia. Dle zkušeností z pilotáže úlohy pomáhají žákům vytvořit a upevnit si adekvátní představy o souřadnicích bodu; žákům vyšších ročníků napomohly k vizualizaci pojmu vektor. Úlohy navíc umožnily zopakování a procvičení vlastností některých geometrických útvarů jako čtverec, obdélník, trojúhelník, lichoběžník aj. Žáci při řešení používají nejen výpočty, ale i geometrické konstrukce a různé symbolické zápisy, čímž si propojují různé přístupy k popisu rovinných objektů.

Uvedené úlohy lze použít ve výuce v takové podobě, ve které jsou předkládány. Zároveň však mohou sloužit i jako inspirace k přípravě podobných, podle potřeby snazších i obtížnějších zadání, podle toho, které učivo potřebujeme s žáky cíleně procvičit.

4.7 Literatura

Herman, J. Matematika: Osová a středová souměrnost. Praha: Prometheus, 1995. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-85849-73-9.

Kočandrle, Milan a Leo Boček. Matematika pro gymnázia: Analytická geometrie. Praha: Prometheus, 1995. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-7196-120-5.

Moravcová, V. a Š. Kaňková (2018). Propojení práce v soustavě souřadnic s dalšími oblastmi matematiky. In: Vondrová, N. (ed.), *Dva dny s didaktikou matematiky 2018: sborník příspěvků.* Praha: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2008. 91-97 s.

Odvárko, Oldřich a Jiří Kadleček. Matematika pro 6. ročník základní školy. [3]: Úhel, trojúhelník, osová souměrnost, krychle a kvádr. Praha: Prometheus, 2011. Učebnice pro základní školy. ISBN 978-80-7196-416-2

Odvárko, Oldřich a Jiří Kadleček, J. (2012). Matematika pro 7. ročník základní školy [3]: Shod-

1 René Descartes (1596–1650) byl francouzský filosof, matematik a fyzik. Je považován za jednoho ze zakladatelů analytické geometrie. O této metodě psal původně ve francouzštině, avšak jeho dílo se dočkalo uznání až po překladu do latiny. Z latinské verze jména autora (Renatus Cartesius) je také odvozen termín *kartézská* soustava souřadnic.

nost, středová souměrnost, čtyřúhelníky, hranoly. Praha: Prometheus, 2012. Učebnice pro základní školy. ISBN 978-80-7196-430-8.

Pomykalová, E. Matematika pro gymnázia: Planimetrie. Praha: Prometheus, 1993. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-7015-468-3

Summary

The methodological material contains three key chapters describing the ideal course of three lessons. The first lesson (Chapter 2) is devoted to the introduction of the Cartesian coordinate system and the practicing of point coordinates. It includes work with *Square and rectangle worksheet*. The second lesson (Chapter 3) deepens the interconnection of plane geometry tasks with work in the Cartesian coordinate system through the worksheet *Triangles* and other tasks. The third lesson (Chapter 4) focuses on the propaedeutic of vector concept. Pupils discover the relation between algebraic expressions with variables x and y and motion in the orthogonal coordinate system. This movement then tries to write in a simple way until they achieve the vector coordinates.

The presented tasks have been tested with pupils of different grades of the lower and upper secondary school. Based on the experience from pilotage, these tasks helped to pupils to create adequate ideas about point coordinates and to visualize the vector concept. In addition, the tasks allowed the repeating and practicing the properties of some geometric shapes such as square, rectangle, triangle, trapezoid, etc. Pupils use not only numerical calculations, but also geometric constructions and various symbolic notations to give different approaches to describing planar objects in connection.

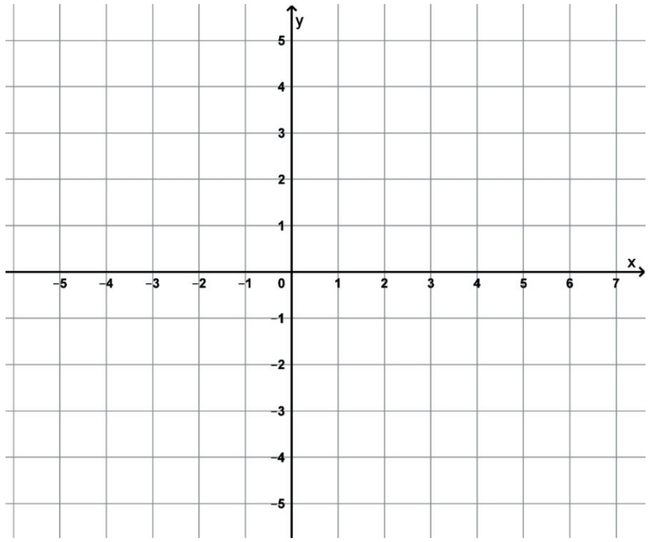
The tasks can be used in teaching in the presented form. However, they can also serve as an inspiration to prepare similar, easier or more difficult, tasks in according to actual curriculum.

4.8 Přílohy – pracovní listy

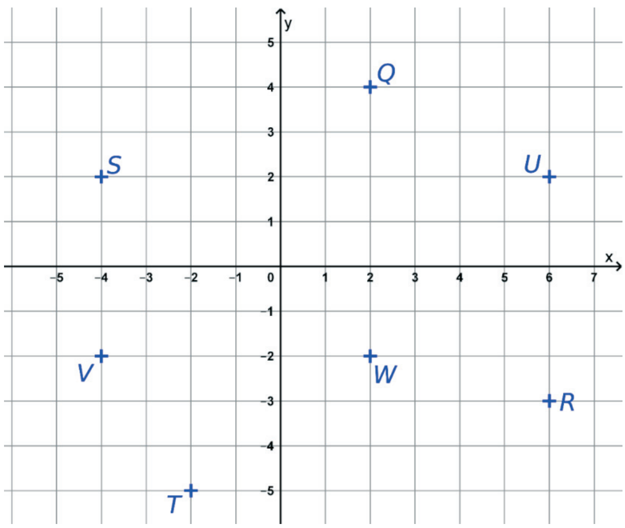
Na dalších stranách následuje šest příloh A–F v podobě pracovních listů. U pracovního listu E je připojeno řešení. Řešení ostatních pracovních listů lze dohledat v textu metodického materiálu.

A) SOUŘADNICE BODU

1) Zakreslete do pravoúhlé soustavy souřadnic body: $A[3; 2]$, $B[6; -1]$, $C[-2; -1]$, $D[0; 4]$, $E[-5; 0]$, $F[5; -3]$.



2) Zapište souřadnice bodů Q, R, S, T, U, V, W a doplňte správně znaky <, >, = do zápisů pod obrázkem:



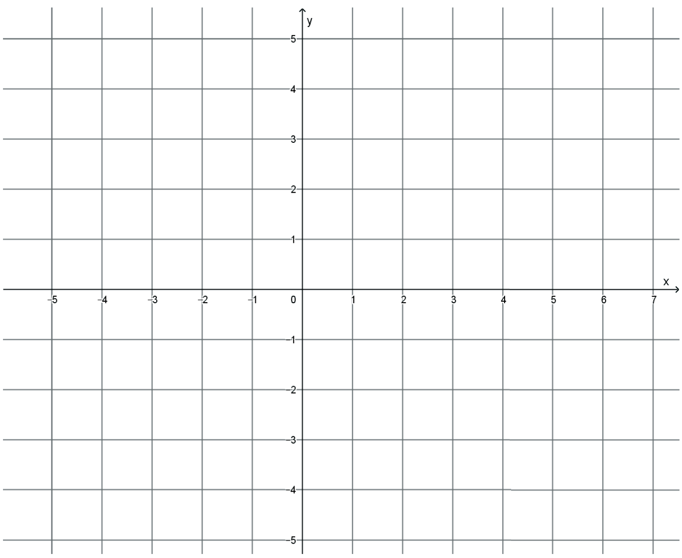
a) x_Q ..... x_W
b) y_Q ..... y_S
c) y_S ..... y_U
d) x_T ..... x_U
e) y_W ..... y_R
f) x_V ..... y_Q

B) ČTVEREC A OBDÉLNÍK

Pro potřeby tohoto pracovního listu používáme jednotku na ose x i y 1 cm.
Jsou dány body $A[4; -2]$ a $C[4; 4]$. Úsečka AC je úhlopříčkou čtverce.

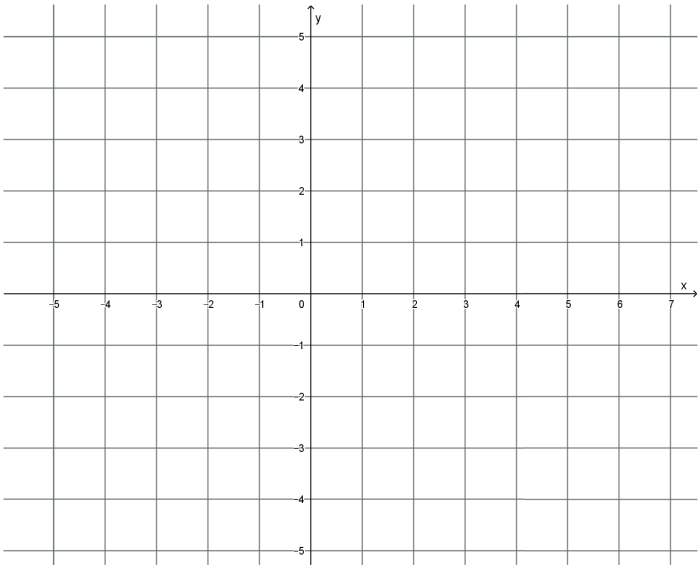
- Narýsujte do soustavy souřadnic (dole na stránce) čtverec *ABCD*.
- Zapište souřadnice bodů B a D:……………………………………………………………………..
- Zapište souřadnice středu S čtverce *ABCD*:……………………………………………..
- Vypočítejte obsah čtverce *ABCD*:

Jsou dány body $K[-5; -1]$ a $L[-1; -1]$. Úsečka KL je stranou obdélníku $KLMN$. Sestrojte jeho zbývající vrcholy, jestliže víte, že obsah obdélníku je 12 cm^2. Najděte všechna řešení a do obrázku zapište souřadnice nalezených bodů M, N.



C) TROJÚHELNÍKY

Pro potřeby tohoto pracovního listu používáme jednotku na ose x i y 1 cm.
Do soustavy souřadnic znázorněte body $A[-4; 1]$, $B[-1; -2]$, $C[-1; 4]$, $K[3; 1]$, $L[7; -1]$, $M[3; 3]$ a narýsujte trojúhelník ABC a trojúhelník KLM.



1) Určete vlastnosti obou trojúhelníků:

Δ ABC		Δ KLM	

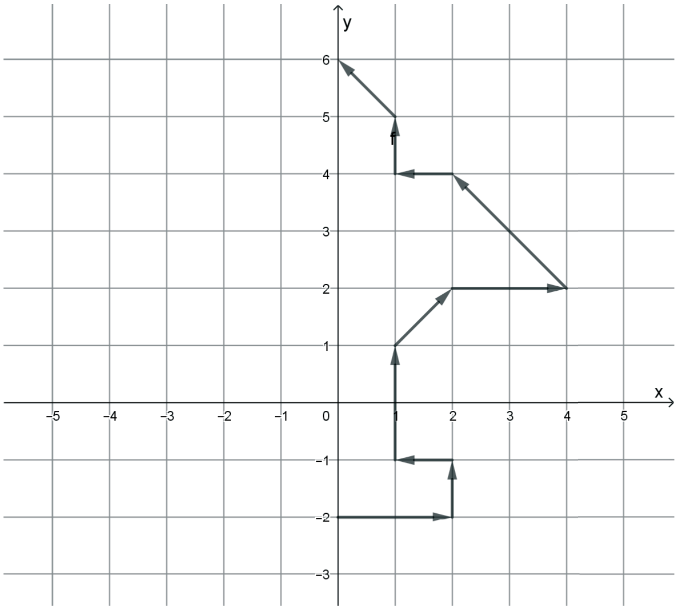
2) V obou trojúhelnících barevně vyznačte a popište stranu a k ní příslušnou výšku, kterou můžete co nejvýhodněji použít k výpočtu obsahu trojúhelníku.
3) Vypočítejte obsahy obou trojúhelníků:

Δ ABC

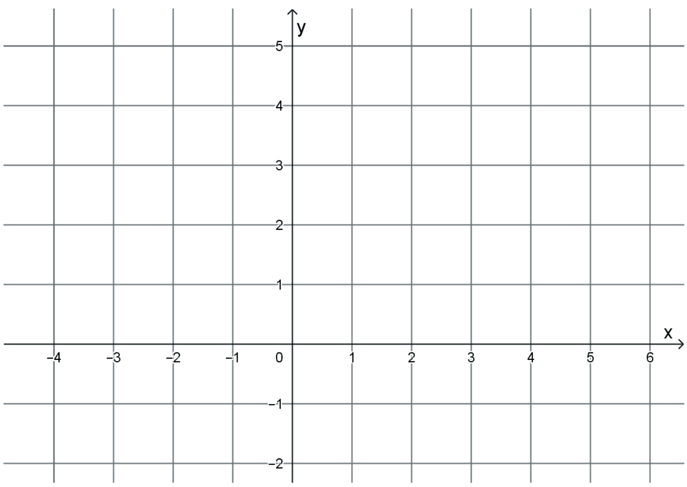
Δ KLM

D1) PROCHÁZKY SOUSTAVOU SOUŘADNIC – zadané pomocí výrazů

1) Na obrázku je zakreslena procházka po čtvercové síti s počátkem v bodě [0; −2], kterou bychom zapsali takto: +2x; +y; −x; +2y; +x + y; +2x; −2x + 2y; −x; + y; −x + y. Dokreslete do obrázku procházku se stejným počátečním bodem tak, aby byla osově souměrná s již zakreslenou trasou podle osy y. Tuto novou procházku zapište:
Co vám obrázek připomíná?

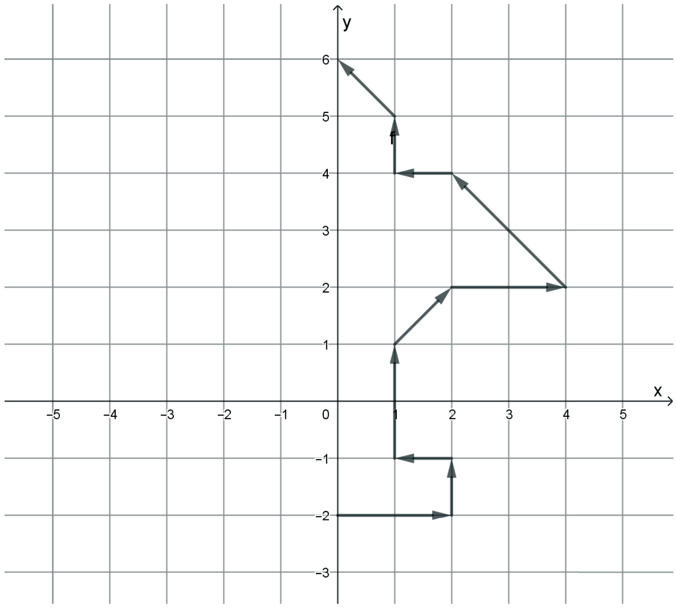


2) Zakreslete procházku z počátečního bodu [−3; −2]:
+2x; +2x + 2y; −x + y; +x + y; −2x + 2y; +2x + y; +2x; −2y; −x − y; +y; −x + y; +x

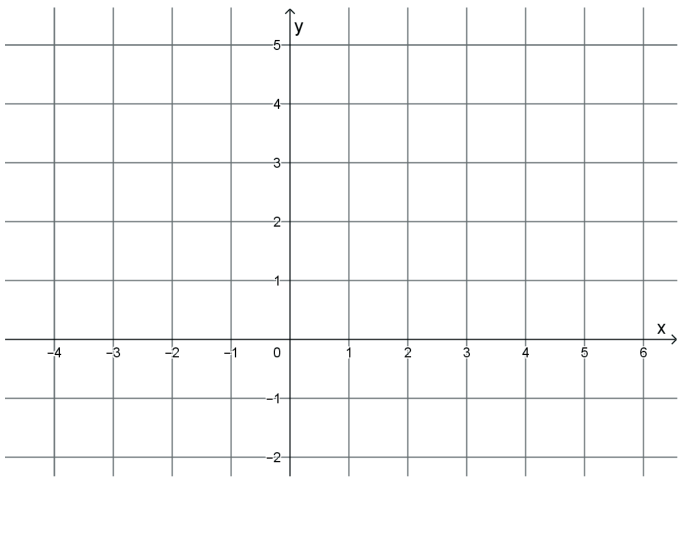


D2) PROCHÁZKY SOUSTAVOU SOUŘADNIC – zadané pomocí vektorů

1) Na obrázku je zakreslena procházka po čtvercové síti s počátkem v bodě [0; −2], kterou bychom zapsali takto: (2, 0); (0, 1); (−1, 0); (0, 2); (1, 1); (2, 0); (−2, 2); (−1, 0); (0, 1); (−1, 1). Dokreslete do obrázku procházku se stejným počátečním bodem tak, aby byla osově souměrná s již zakreslenou trasou podle osy *y*. Tuto novou procházku zapište:
Co vám obrázek připomíná?

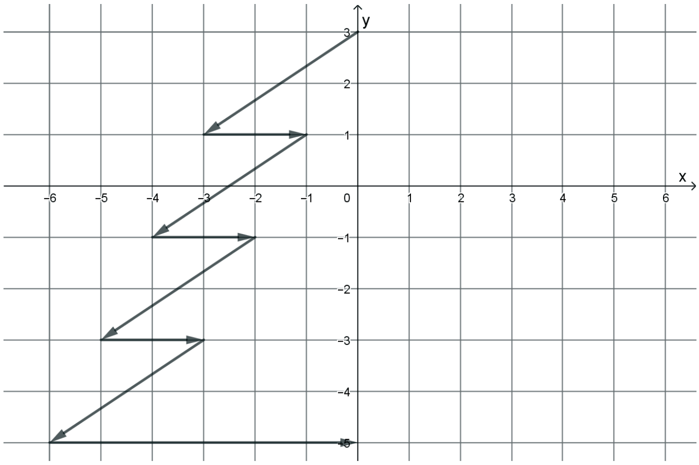


2) Zakreslete procházku z počátečního bodu [−3; −2]:
(2, 0); (2, 2); (−1, 1); (1, 1); (−2, 2); (2, 1); (2, 0); (0, −2); (−1, −1); (0, 1); (−1, 1); (1, 0)

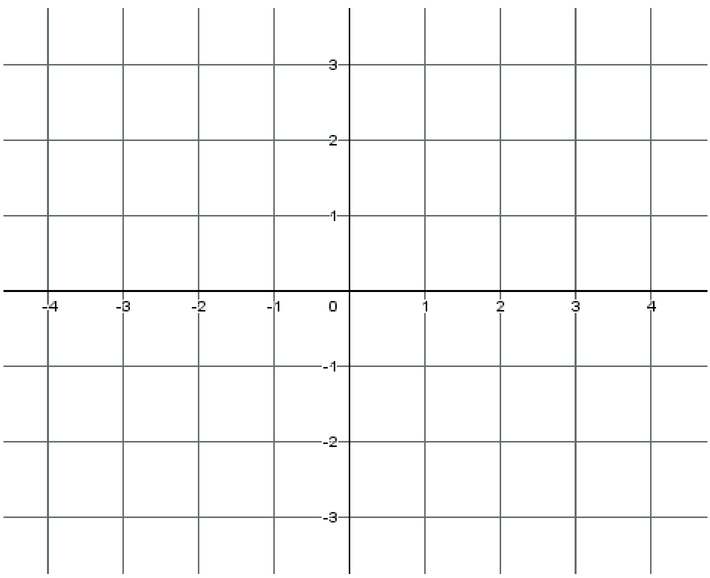


E) PROCHÁZKY SOUSTAVOU SOUŘADNIC – 2. část

1) Na obrázku je zakreslena procházka po čtvercové síti s počátkem v bodě [0; 3], daná zápisem: $-3x - 2y$; $+2x$; $-3x - 2y$; $+2x$; $-3x - 2y$; $+2x$; $-3x - 2y$; $+6x$. Dokreslete do obrázku procházku se stejným počátečním bodem tak, aby byla osově souměrná s již zakreslenou trasou podle osy y. Tuto novou procházku zapište:
Co vám obrázek připomíná?

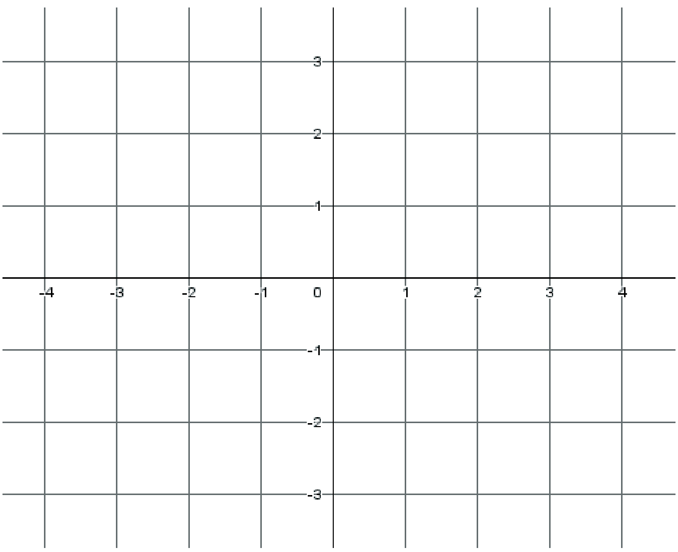


2) Zakreslete procházku s počátkem v bodě [–1; 1] danou zápisem: $+2y$; $+x - 2y$; $+x + 2y$; $-2y$; $+2x$; $-2x - y$; $+2x - y$; $-2x$. Dokreslete do obrázku procházku s počátečním bodem [1; –1] tak, aby byla středově souměrná podle počátku soustavy souřadnic s již zakreslenou. Tuto novou procházku zapište:
Co vám obrázek připomíná?



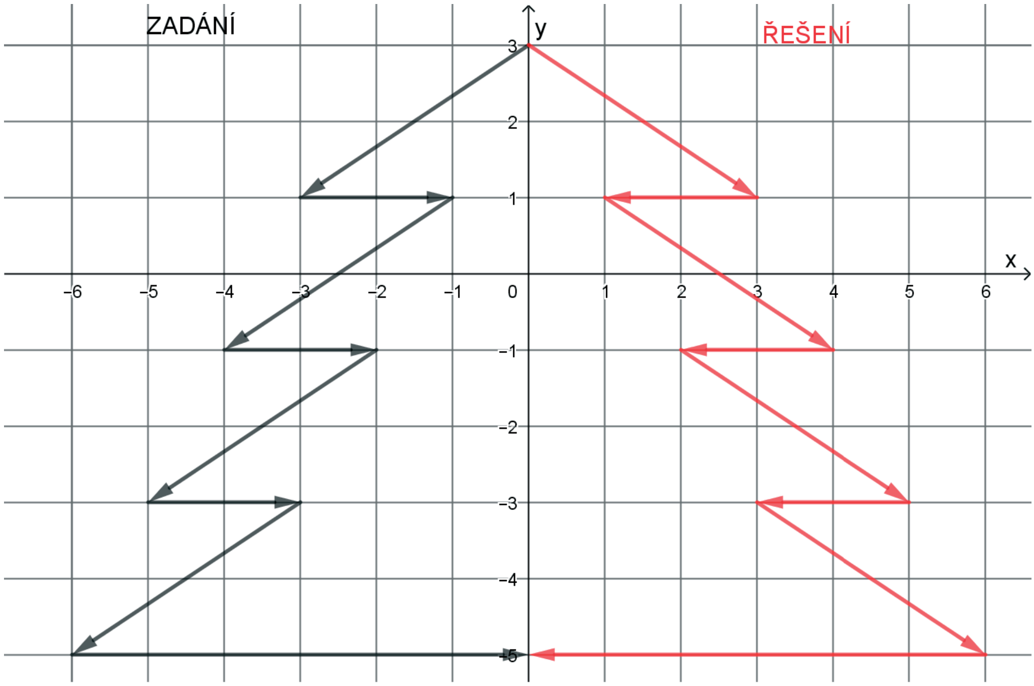
3) Na obrázku je zakreslena procházka po čtvercové síti s počátkem v bodě [0; 3], daná zápisem: (−3, −2); (2, 0); (−3, −2); (2, 0); (−3, −2); (2, 0); (−3, −2); (6, 0). Dokreslete do obrázku procházku se stejným počátečním bodem tak, aby byla osově souměrná s již zakreslenou trasou podle osy y. Tuto novou procházku zapište:
Co vám obrázek připomíná?

4) Zakreslete procházku s počátkem v bodě [−1; 1]: (0, 2); (1, −2); (1, 2); (0, −2); (2, 0); (−2, −1); (2, −1); (−2, 0). Dokreslete do obrázku procházku s počátečním bodem [1; −1] tak, aby byla středově souměrná podle počátku soustavy souřadnic s již zakreslenou. Tuto novou procházku zapište:
Co vám obrázek připomíná?

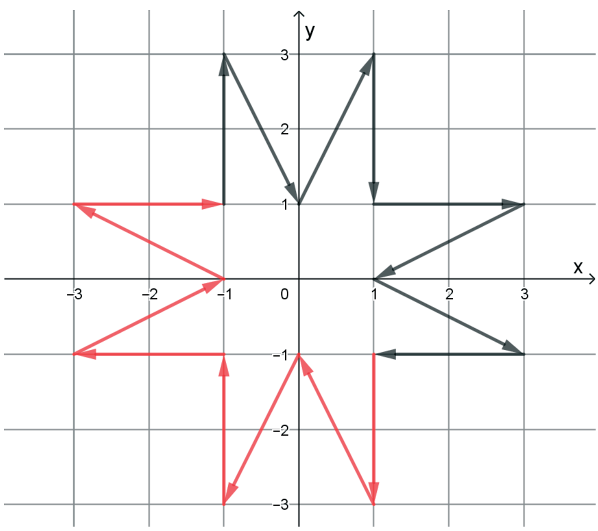


ŘEŠENÍ

1) a 3) výrazy: $+3x - 2y$; $-2x$; $+3x - 2y$; $-2x$; $+3x - 2y$; $-2x$; $+3x - 2y$; $-6x$
vektory: (3, –2); (–2, 0); (3, –2); (–2, 0); (3, –2); (–2, 0); (3, –2); (–6, 0)



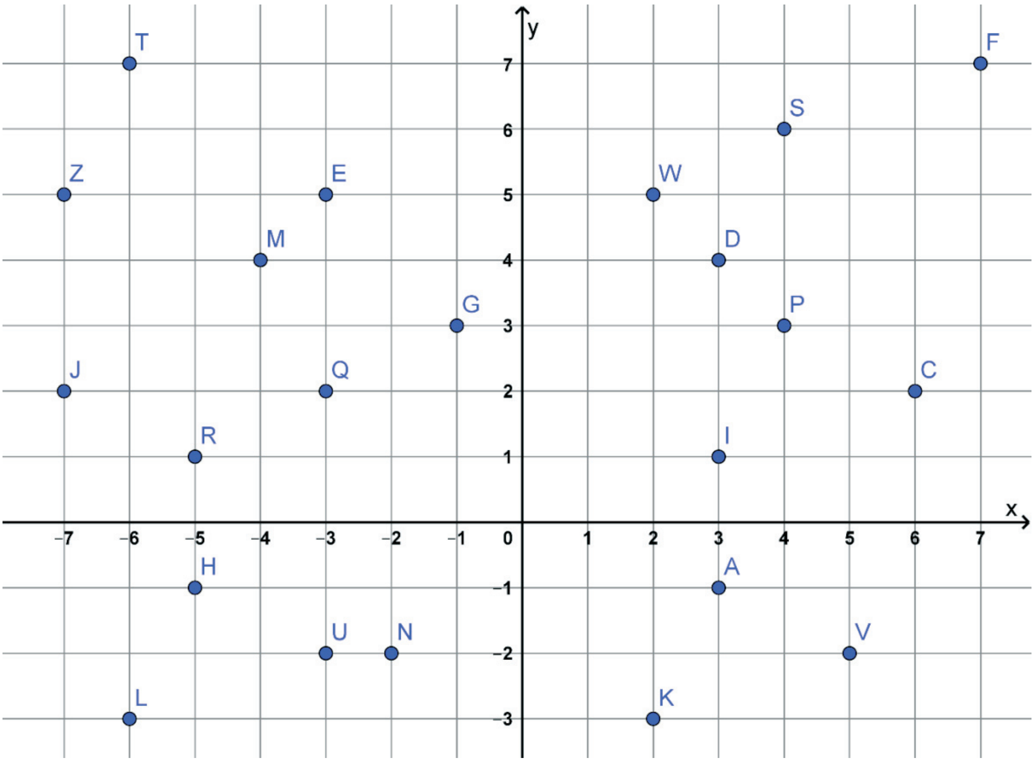
2) a 4) jedná se o opačné výrazy: $-2y$; $-x + 2y$; $-x + 2y$; $+2y$; $-2x$; $+2x + y$; $-2x + y$; $+2x$
a opačné vektory: (0, –2); (–1, 2); (–1, 2); (0, 2); (–2, 0); (2, 1); (–2, 1); (2, 0)



F) Hádanka

Při procházkách soustavou souřadnic, které vždy začínají v počátku, objevíte jméno a příjmení slavného francouzského filosofa a matematika, podle nějž je pojmenována kartézská soustava souřadnic. Kdo to byl?

(–5, 1); (2, 4); (1, –7); (–1, 7)
(3, 4); (–6, 1); (7, 1); (2, –4); (–3, –3); (–8, 2); (–1, 6); (3, –2); (7, 1)



5 Rozvíjení schopností v matematice – od aritmetiky k algebře

5.1 Rozvíjení schopností v matematice 1. stupně ZŠ

Darina Jirotková, Jaroslava Kloboučková

Abstrakt:
V první části této kapitoly se zamýšlíme nad tím, co jsou matematické schopnosti, jaké schopnosti lze v matematice rozvíjet, u jakých žáků a za jakých okolností. Charakterizujeme žáky do sedmi skupin podle jejich vztahu k matematice. Ten je klíčový pro rozvoj různých matematických schopností. Vztah žáka k matematice do značné míry ovlivňuje učitel – vyjmenováváme vlastnosti, které učitel u sebe může posílit, nebo je docela změnit, aby přispěl k efektivnímu rozvoji některých matematických schopností žáka. Několik matematických schopností je blíže popsáno a ilustrováno. Nakonec je nabídnuto několik úloh, které ukazují cestu od aritmetických zkušeností v nejnižších ročnících k algebře ve vyšších ročnících.

Klíčová slova:
matematické schopnosti, vztah žáka k matematice, algebra, aritmetika, poznávací proces, teorie generických modelů

Abstract:
In the first part of this chapter we discuss what mathematical ability is, what abilities can be developed in mathematics, in what pupils and under which circumstances. We characterize pupils into seven groups according to their approach towards mathematics. This approach plays a key role in the development of various mathematical abilities. A pupil's relationship to mathematics is largely influenced by the teacher. We list some qualities of teachers that can be reinforced or changed in order to support efficient development of some pupil's mathematical abilities. Some mathematical abilities are described and illustrated. Finally, several tasks are offered to show the way from arithmetical experience from the lowest grades to algebra in higher grades.

Keywords:
mathematical abilities, pupil's approach towards mathematics, algebra, arithmetic, learning process, Theory of generic models

5.1.1 Východiska

K zamyšlení

Zamysleme se nejdříve, jaké schopnosti u žáků v matematice chceme rozvíjet, jaké skutečně rozvíjíme, jak je diagnostikujeme a jak je hodnotíme.

V transmisivním přístupu k vyučování učitel žákům učivo nejprve vysvětlí, ukáže, jak se řeší úlohy probíraného tematického celku, pak učivo s třídou procvičuje a nakonec prověří písemnou prací, jak si který žák řešitelské postupy osvojil. Žáky pak obvykle hodnotí především podle toho, jak dovedně, rychle a přesně řeší úlohy z probraného učiva. To umí dobře. Úlohy algoritmického typu žáci obvykle zvládají bez problémů. Avšak nealgoritmické úlohy, například slovní úlohy, ve kterých nelze použít tradiční zápis, nebo kombinatorické úlohy dělají potíže. Takové úlohy se považují za vhodné pro nadané žáky, neboť se řeší vlastním „selským rozumem". Nerutinní řešení mají většinou různé nedostatky – nepřehledný zápis, výpočty vhledem nebo neobratné výpočty apod. O řešiteli však vypovídají, že je v matematickém myšlení autonomní, že je schopen nezávislého vývoje. Takovému žákovi stačí dát dobře promyšlenou sérii úloh a on, společně s několika spolužáky a ve vzájemné diskusi, může odhalit poznatky, které by jim jinak předkládal učitel.

Na základě mnohaletých zkušeností se žáky i se studenty VŠ věříme, že každý žák do jisté míry má schopnost řešit i netradiční, nerutinní úlohy a odhalovat matematické poznatky. Kvalita matematického myšlení žáka primárně závisí na jeho matematických schopnostech. Proto se zde zaměřujeme na rozvoj matematických schopností žáka.

Rozvoj matematických schopností žáka je přímo úměrný jeho vztahu k intelektuální práci vůbec a matematice zvláště. Běžně se stává, že některé matematické činnosti žák dělá rád a jiné naopak. Žák, který má potřebu zabývat se matematikou, bude v rozvoji jednotlivých schopností postupovat rychleji než žák, který tuto potřebu nemá. Žák, který má k této činnosti dokonce negativní vztah, bude stagnovat. I když se pod tlakem naučí některé postupy, budou to spíše pamětí uchopené instrukce, avšak k rozvoji schopností zde téměř nedojde. Tuto myšlenku ilustrujeme příběhem z archivu M. Hejného.

5.1.1.1 Ilustrace (příběh z archivu M. Hejného)

V první třídě jsem sledoval, jak žáci řeší doplňovací úlohy typů
a) 5 + __ = 8, b) __ + 2 = 7, c) 9 – __ = 6, d) __ – 4 = 3.

Některým žákům to docela šlo, jiní s tím zápasili.

Úloha typu a) šla nejlépe, zde žáci převážně dopočítávají. Nejhůře a podle očekávání šla úloha typu d). Učitelka, ve snaze slabým žákům pomoci, již dříve pověsila na zeď pomůcku (tab. 5.1):

Tab. 5.1

Plus nevím	5 + __ = 8	řeš takto	__ = 8 – 5
Nevím plus	__ + 2 = 7		__ = 7 – 2
Minus nevím	9 – __ = 6		__ = 9 – 6
Nevím mínus	__ – 4 = 3		__ = 3 + 4

Žákyně Lenka měla na lístku dokonce vlastní tabulku, „vylepšenou“, kterou jí vytvořila maminka. Pomocí té tabulky úlohy rychle řešila. Po hodině jsem poprosil dívku, aby mi ukázala, jak se tabulka používá. Ochotně mi postup vysvětlila. Vzala úlohu __ + 3 = 4 a řekla: „To je nevím, plus.“ Ukázala na druhý řádek tabulky. U slova „nevím“ ukázala na rámeček a u slova „plus“ na znak +. Prstem zůstala na konci řádku a řekla: „Druhé číslo mínus první, tedy čtyři mínus tři (píše 4 – 3 = 1), zapíši 1 (do rámečku dopsala 1).“ Vítězně na mne hleděla. Řekl jsem, že to vysvětlila náramně, že mi je to zcela jasné. Loudila na mne, ať jí já dám ještě nějakou úlohu. Zeptal jsem se, zda může být i náročnější. Řekla, že ano (v domnění, že půjde o větší čísla). Já jí ale dal úlohu: 1 + __ + 2 = 4. Chvíli na to hleděla a řekla: „To jsme ještě nedělali.“ Spolužák Láďa, který byl v hloučku přihlížejících dětí, řekl: „Je to jedna.“ Zeptal jsem se ho, jak to ví. Řekl: „To je jasný, jedna a jedna a dvě jsou čtyři.“ Ptal jsem se dále: „A uměl bys i toto?“ a napsal jsem úlohu: 8 – __ – 1 = 6 – 2. Láďa použil číselnou osu, kterou měl nalepenu na lavici. Levý ukazovák dal na číslo 7, pravý na číslo 4. Chvíli na to hleděl a pak řekl „tři“. Po hodině mi vyučující řekla, že Láďa je mimořádně bystrý a vše si řeší po svém, většinou rychle a správně. Řekla, že některé jeho triky přebírají i další žáci.

<u>K zamyšlení</u>

A. Posuďte, jaký cíl plní tabulka 1, kterou učitelka dala dětem. Popište, jaké největší úskalí může plynout, když učitel ve snaze pomoci zejména slabším žákům nabízí takovéto návody.
B. Podrobně analyzujte myšlenkový proces žákyně Lenky při řešení úlohy pomocí tabulky.

Tabulka 6.1 plní svůj výkonnostní cíl – má pomoci slabším žákům k dosažení výkonu, jak bylo řečeno. Žáci jako Lenka umí řešit úlohy uvedených typů pomocí tabulky. Lenka i učitelka jsou spokojeny.

Tabulka ale nedává žákovi vhled do aritmetických vztahů, které jsou zde řešeny. Neumožní žákovi řešení upravit, neumožní žákovi řešit ani úlohy nepatrně obměněné. Navíc žák získává přesvědčení, že úlohy, v nichž se hledá neznámé číslo, se řeší návodem. Lenka svou reakcí „To jsme se ještě neučili,“ sděluje, že na tyto složitější úlohy, jakou je například úloha 1 + __ + 2 = 4, ještě nedostali návody.

Když se podíváme do většiny učebnic matematiky pro 1. st., úloh tohoto typu tam mnoho nenajdeme, snad až v 5. ročníku, a to již obvykle mají formu rovnic: $1+x+2 = 4$. Přístup Ládi ukázal, že i žáci 1. ročníku jsou schopni podobné náročné úlohy vyřešit. Nikoli pomocí znalosti pravidla, ale schopností získat vhled do dané aritmetické situace. Ta nebyla zatížena použitím písmene a žák tím získal cenné zkušenosti do budoucna pro řešení rovnic.

To, co předvedla Lenka, ale také má svou cenu. Lenka je očividně nadšená tím, že se naučila používat tabulku a že se již těchto úloh nebojí. Dosažený úspěch ji motivuje k řešení dalších úloh. Nadšení dívky má vážnější příčinu. Zvládla celkem náročnou šestikrokovou proceduru:

1) idiomem „*To je nevím, plus*“ identifikuje typ úlohy,
2) najde jej v levém sloupci tabulky 1,
3) přejde v daném řádku na pravý sloupec,
4) idiomem „Druhé číslo mínus první“ v něm identifikuje operaci,
5) tu pak realizuje v dané úloze,
6) výsledek zapíše do rámečku.

Tedy to, co se Lenka naučila, je aplikovat vícekrokovou proceduru, algoritmus, jak řešit úlohy daných typů. Tím rozvinula svoji schopnost zvládat vícekrokové procedury. Vhled do aritmetiky ale bohužel nezískala.

5.1.2 Co jsou matematické schopnosti

Seznam matematických znalostí žáka prvního stupně není těžké udělat. Poslouží nám k tomu RVP nebo některá sada učebnic.

Podstatně náročnější je vytvořit seznam matematických schopností, které lze a které bychom měli rozvíjet v matematice. Každý rád řekne, že matematika rozvíjí logické myšlení, ale dál je již obtížné konkretizovat, jak to má učitel dělat.

K zamyšlení

C. Které schopnosti žáka vypovídají o logickém myšlení?
D. Pozorujte, nejlépe si nahrajte, nějakého žáka při řešení jemu přiměřeně obtížné úlohy. Podrobně analyzujte jeho myšlenkový proces a pojmenujte, jaké žákovy matematické schopnosti se na řešení podílejí. Pokuste se popsat jejich úroveň.

Vyjmenujeme schopnosti, které jsou specifikovány v dnešním vymezení matematické gramotnosti žáků od 6 do 18 let, které je akceptováno MŠMT a ČŠI a vzhledem k němu jsou nastaveny hodnotící nástroje. Matematická gramotnost je charakterizována pomocí následujících sedmi tezí popisující matematické schopnosti žáků:

1. Potřeba jedince opakovaně zažívat radost z úspěšně vyřešené úlohy, uzření nového pojmu, vztahu, argumentu nebo situace. Důvěřovat vlastním schopnostem.
2. Schopnost porozumět různým typům matematického textu (symbolický, slovní, obrázek, graf, tabulka) a aktivně používat nebo dokonce dotvářet různé matematické jazyky.
3. Schopnost získávat a třídit zkušenosti pomocí vlastní manipulativní, spekulativní a badatelské činnosti, nejčastěji metodou pokus-omyl.
4. Schopnost získané zkušenosti zobecňovat, objevovat zákonitosti, formulovat hypotézy.
5. Schopnost tvořit modely a protipříklady, argumentovat.
6. Schopnost účinně pracovat s chybou jako podnětem k hlubšímu pochopení zkoumané problematiky.
7. Schopnost individuálně i v diskusi zejména se spolužáky analyzovat procesy, pojmy, vztahy a situace v oblasti aritmetiky, geometrie, logiky a práce s daty; u žáků starších k tomu přibude i oblast funkcí.

Jednotlivé schopnosti lze diagnostikovat prostřednictvím řešení vhodně zvolených úloh. Pouze pro diagnostiku jedné důležité schopnosti z uvedeného seznamu neumíme najít nástroje. Je to schopnost **účinně pracovat s chybou** – nebýt chybou demotivován, zamyslet se nad příčinou chyby a poučit se z ní do dalšího řešení. Neumíme totiž vyvolat situaci, ve které se žák určitě dopustí chyby. Ovšem žáci se dopouští mnoha chyb, a proto tuto schopnost můžeme pozorovat a rozvíjet jinými prostředky než jiné schopnosti uvedeného seznamu. Každá z uvedených sedmi položek je velice obsáhlá, navzájem se prolínají a překrývají.

Například **schopnost třídit soubor jevů** (viz bod 3) můžeme řadit pod některou z ostatních uvedených schopností podle dané situace. Například schopnost třídit soubor jevů může někdy spadat pod objevování pojmu (trojúhelníky dělíme na ostro-, pravo- a tupoúhlé), jindy pod tvorbu řešitelské strategie (když chceme například zjistit počet trojmístných čísel sestavených z číslic 1, 2 a 3), což zařadíme pod bod 4.

Uvedené schopnosti se různě propojují a v jediném řešitelském procesu žáka lze často odhalit několik navazujících a prolínajících se schopností. Budeme-li například schopnost „vhled do desítkové soustavy“ (bod 2) u žáka 2. ročníku diagnostikovat pomocí algebrogramu AB + B = 38, tak tím současně diagnostikujeme i jeho znalost „sčítání s přechodem přes desítku“. Když žák najde pouze řešení 34 + 4 = 38, zeptá se jej učitel, jestli je to jediné možné řešení. Když žák neví, nebo odpoví záporně, učitel vidí nejen to, že žák má jen omezenou schopnost vhledu do desítkové soustavy, ale též to, že příčinou nedostatku je formální znalost operace „přechod přes desítku“. Když pak žák nakonec najde i řešení 29 + 9 = 38, tak rozvíjí obojí – jak schopnost získávat vhled do desítkové soustavy, tak znalost operace „přechod přes desítku“.

Jak bylo výše řečeno, matematické schopnosti se lépe a rychleji rozvíjejí u žáka, když má žák kladný vztah k matematice. V následujícím odstavci se tomu budeme věnovat.

5.1.3 Vztah žáka k matematice

Existují žáci, kteří se s vervou pouští do jakékoli matematické úlohy a nenechají se odradit, když se k řešení nedopracují v krátké době. Na druhé straně existují i žáci, kteří se jakékoli matematické úloze vyhýbají. Mnoho žáků má dokonce k různým oblastem matematiky různý vztah. Někteří žáci s radostí řeší „sloupečky", ale slovní úlohy jim nahání strach. Někteří rádi pracují s krychlovými stavbami, ale jiné tato činnost vůbec nepřitahuje. Lenka z horního příběhu se ráda učí realizovat procedury, ale nemá potřebu získávat vhled do aritmetické situace. Rozlišíme sedm případů. Žák:

1. důsledně se vyhýbá matematice.
2. ochotně řeší rutinní úlohy (sloupečky), jiným úlohám se vyhýbá.
3. má potřebu řešit rutinní úlohy.
4. ochotně řeší jistý typ nerutinních úloh, nejčastěji jsou to úlohy, u nichž lze použít metodu pokus-omyl.
5. má potřebu řešit jistý typ nerutinních úloh.
6. ochotně řeší skoro všechny typy matematických úloh.
7. má vnitřní potřebu řešit matematické úlohy.

Těchto sedm případů můžeme považovat i za vývojová stádia vztahu žáka k matematice. V některých položkách se vyskytuje slovo ochota, v jiných potřeba. Je to důležité rozlišení. Ochota znamená, že žák předloženou činnost dělá bez protestů a dokonce s chutí. Potřeba je ale více. Znamená, že žák cíleně vyhledává danou činnost. Nejčastěji se to projevuje tím, že žák žádá učitele o úlohy jistého typu. Posun: ochota → potřeba se nachází u položek 2 a 3, 4 a 5 a dále u položek 6 a 7.

<u>K zamyšlení</u>

E. Pokuste se k jednotlivým položkám přiřadit konkrétní žáky vaší třídy.
F. Vzpomeňte, zda se vám někdy podařilo posunout vztah žáka k matematice. Popište, mezi jakými položkami k posunu došlo, jak jste to pozorovali a jakým způsobem se vám to podařilo.

Co by měl dělat učitel? Jestliže ve třídě je více žáků, kteří se vyhýbají matematice, pak by se měl učitel zamyslet nad vlastním edukačním stylem, nad interakcí s těmito žáky a uvažovat o změně:

- podporovat a moderovat diskuzi mezi žáky
- předkládat žákům přiměřeně náročné úlohy, tj. takové, které jsou v zóně jejich nejbližšího vývoje, tedy řešení je jim dosažitelné, ale musí přitom vynaložit jisté intelektuální úsilí
- být trpělivý, i když si řešitelský proces žáka žádá delší čas a je poněkud neobratný
- žákům neradit, neupozorňovat je na jejich případné chyby, ale navodit situaci, aby chybu objevili sami

1. Jestliže se žák vyhýbá jakékoli intelektuální aktivitě, je rozumné se poradit se školním psychologem, případně zkušeným kolegou, seznámit se s rodinným zázemím žáka, s jeho zálibami a problémy.
2. Žák, který ochotně řeší rutinní úlohy, dokazuje touto úspěšnou prací sobě i učiteli jistou matematickou úroveň. Ta závisí především na tom, jak učitel tuto práci hodnotí.

Žákovi, který upřednostňuje pouze rutinní úlohy a který říká, že jiné úlohy ho nebaví, že je řešit neumí, hrozí nebezpečí, že získá přesvědčení, že on takové úlohy nikdy řešit nedokáže, protože na to „nemá buňky“. Než aby byl konfrontován s vlastním neúspěchem, odmítá pomoc učitele nebo spolužáka: „To mi nevysvětlujte, já to stejně nepochopím, ukažte mi, jak to mám počítat a já se to naučím.“

U takového žáka je nutné zlomit jeho přesvědčení o vlastní nemohoucnosti. Existuje jediná cesta: úlohy, které žák vyřeší a které jsou trochu nerutinní. Za úspěšné vyřešení těchto úloh žáka chválit a opakovat mu „vidíš, že to umíš“.

<u>K zamyšlení</u>

H. Navrhněte, jak byste mohli pomoci Lence z výše uvedené ilustrace tak, aby se zbavila přesvědčení, že dokáže řešit jen úlohy typu daného v tabulce.

Lence z výše uvedeného příběhu můžeme dát úlohu 1 + __ + 2 = 6 s instrukcí: „Do rámečku dávej postupně čísla 1, 2, 3, … a hledej to číslo, které tam patří.“ Tím je nerutinní úloha doplněna instrukcí, ale instrukce vede Lenku k získání zkušenosti, že tímto způsobem (tj. metodou pokus-omyl) vyřešit úlohu dokáže.

3. Když je žák víc než ochoten řešit rutinní úlohy a má dokonce potřebu této činnosti, je třeba se ptát, zda příčina žákova chování je spíše kognitivní, nebo spíše sociální, neboť zde hrozí ustrnutí.

- Žák má kognitivní potřebu tímto způsobem hlouběji pronikat do aritmetiky, automatizovat kalkulativní spoje, objevovat různé číselné zákonitosti. Žák má radost z řešení a často i vytváří úlohy, někdy se pochlubí i objevem, který u této činnosti udělá (Během takového nácviku žák, který předtím u algebrogramu AB + B = 38 našel pouze jedno řešení, najednou zvolal „no jó“ a utíkal učiteli ukázat i řešení druhé – to s přechodem přes desítku).
  Protože se jedná o přirozené stádium vývoje, je třeba práci žáka podporovat a čekat, až žák potřebu nácviku vyčerpá – pak přirozeně dozraje do dalšího stádia.

- Žák má sociální potřebu ukázat okolí schopnost rychle a bezchybně počítat; často tím i vyvažuje neschopnost náročnější práce, například neschopnost řešit slovní úlohy.
  Žák se rychlostí své práce chlubí, vítá soutěže ve třídě, kdy se hodnotí rychlost. Toto je závislé na hodnocení učitele.
  Žákovi hrozí ustrnutí ve vývoji. Rozhodující je zde přesvědčení učitele. Jestliže při hodnocení práce žáků učitel klade váhu na tvořivé činnosti a rychlému počítání nepřikládá zásadní význam, orientuje třídu k hledání a bádání. Zároveň s tím posouvá žáka vpřed způsobem popsaným u druhého stádia ilustrovaného na případu Lenky.

5.1.4 Od aritmetiky k algebře na 1. stupni ZŠ

Tematický celek Algebra (jako jazyk písmen) spadá až na 2. stupeň ZŠ. Je to náročná oblast, a tedy je potřeba ji na 1. stupni postupně připravovat. Na obou stupních je však potřeba si uvědomit smysl výuky algebry. Mezi studenty i vzdělanými rodiči panuje představa, že algebrou rozumíme nácvik práce s výrazy pomocí pravidel typu $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Pokusíme se zde ukázat, že smyslem algebry, smyslem jazyka písmen je rozvinout **schopnost popisovat a zkoumat sérii (aritmetických) objektů a vztahů najednou**, například nekonečnou řadu řešení nějaké úlohy tabulky zachytit jediným vztahem. Tedy algebra se rodí z aritmetiky. Když si uvědomíme rozdíly mezi aritmetikou a algebrou, pomůže nám to v uvědomění si, jaké úlohy žákům předkládat, abychom nastartovali rozvoj algebraického myšlení.

- Aritmetika zkoumá jevy mnohosti, tedy objekty zkoumání jsou nejprve čísla přirozená, později celá, racionální a reálná. Činnosti aritmetiky jsou: binární operace sčítání, odčítání, násobení a dělení, a unární operace zaokrouhlování. Jazykem aritmetiky jsou číslice, desítková soustava, znaky <, =, +, –, x, :, později i zlomek, desetinná čárka, | („dělí“); další znaky jako čárky, kolečka, šipky, … dále obrázky, grafy, schémata, tabulky …
- Algebra zkoumá aritmetické vztahy a soubory aritmetických vztahů. Objekty algebry jsou vztahy, zejména rovnosti, rovnice, později i nerovnosti a nerovnice zapsány s pomocí písmen; soubory číselných výrazů. Činnosti, kterými se zkoumání uskutečňuje, jsou zobecňování souboru aritmetických vztahů do jediného algebraického vztahu, ekvivalentní a později i neekvivalentní úpravy algebraických vztahů. Pracuje se znakovým písmem – tabulky, písmeno.

Jazyk písmen je didakticky náročný tematický celek. Žáky učíme s písmeny zacházet, enormně času věnujeme úpravě algebraických výrazů, ale jejich schopnosti využívat písmena k řešení různých úloh jsou nízké. Příčinu tohoto nedostatku spatřujeme v nedostatečném řešení problémových situací, ve kterých mohou písmena hrát rozhodující roli.

Aritmetika, která je cílená zejména na počtářské dovednosti než na porozumění aritmetice v 1. až 5. ročníku ZŠ, příliš nepomáhá rozvoji algebraického myšlení. Navíc, významná část algebraického myšlení – modelování jevů pomocí jazyka algebry – leží mnohdy spíše v geometrii než v aritmetice, např. uvedený vztah $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Algebra se žákovi začíná vynořovat z aritmetiky od okamžiku, kdy poprvé zaměří svoji pozornost na souvislosti mezi aritmetickými vztahy. Evidence aritmetických jevů pomocí tabulky je nejpřirozenější cesta, jak takové zaměření pozornosti iniciovat. To si ukážeme na dalších ilustracích.

V ilustracích si budeme též všímat schopností, které žák při řešení úloh rozvíjí. Jsou to zejména: schopnost porozumět různým typům matematického textu (symbolický, slovní, tabulka) a aktivně používat nebo dokonce dotvářet různé matematické jazyky.

Dále schopnost získávat, třídit, organizovat zkušenosti pomocí vlastní manipulativní, spekulativní a badatelské činnosti, nejčastěji metodou pokus-omyl. A také schopnost získané zkušenosti zobecňovat, objevovat zákonitosti, formulovat hypotézy.

5.1.5 Ilustrace z oblasti kombinatoriky na 1. stupni ZŠ – vstup do algebry

Řešíme kombinatorickou úlohu: *Kolik různých dvojic lze vybrat z n prvků?*

Cílová skupina: žáci 1. stupně ZŠ, 1. ročník i vyšší ročníky

Cíl úlohy: žáci získají prostřednictvím her, činností zkušenosti s jevy kombinatoriky, konkrétně s výběrem dvou prvků ze souboru 3, 4, … prvků a jejich organizací. Zaměří svoji pozornost na souvislosti mezi aritmetickými jevy a vztahy a evidují aritmetické jevy, např. pomocí tabulky

Potřebný čas na aplikaci: Vždy bude záležet na učiteli, jak bohatou diskuzi žáků se mu podaří otevřít. Plodná diskuze je cennější než další množství úloh. Také záleží na tom, zda učitel ponechá základní zadání, nebo bude číslo určující počet objektů zvětšovat. Proto čas je jen orientační.

Úloha 1a) 15 min, Úloha 1b) 20 min

Úloha 1a) *„Zahřívací“ úloha, kterou lze realizovat kdykoliv v prvním ročníku, ale i v dalších. Žáci hrají molekuly a vytvoří molekuly po 3 nebo 4. Dalším úkolem je, že v jedné molekule si každý žák podá ruku s každým. Kolik podání rukou se uskutečnilo?*

Žáci řeší úlohu dramatizací. Klíčové je ve skupině, kde jsou 4 žáci, zorganizovat podávání ruky tak, aby si skutečně každý s každým ruku podal a aby žádná dvojice si nepodala ruku dvakrát, což se často stává. Po chvíli žáci dojdou k výsledku, že v molekule o 3 žácích se podání ruky uskuteční třikrát a v molekule o 4 žácích šestkrát.

Velice často se stává, že aspoň jeden žák ve třídě se hned pustí do bádání, jak by to bylo, kdyby žáků v molekule bylo 5. V jedné třídě, kde byly spojené dva ročníky, 2. a 3., byl žák Radim, třeťák, který se do bádání pustil, ale byl zvědav, jestli vyjde 9 (zvětšení o 3), nebo 12 (vynásobení dvěma). Je patrné, že u Radima se již zakládalo algebraické myšlení. Radim si uvědomil dokonce dvě vazby mezi čísly 3 a 6, jednu aditivní a jednu multiplikativní, a měl potřebu vyzkoumat, která z nich v úloze hraje roli. Výsledek 10 ho trochu zklamal, mnohokrát jej prověřoval. Pak již hodina skončila. Věříme, že žák se při vhodné příležitosti k problému vrátí. Záleží na tom, jak tomu učitel nahraje.

Nabídneme další úlohy, které vycházejí ze stejného matematického problému, ale jsou formulovány v jiném kontextu, jiným jazykem. Tím dáváme příležitost žákům objevit izomorfizmus mezi úlohami a u některých žáků vzbudíme potřebu popsat řadu izomorfních situací jedním jazykem.

Úloha 1b) *Žáci mají například při tělocviku tento úkol: Obdobně jako na obrázku 5.1 se 4 žáci propojí švihadly tak, aby každý žák byl spojen s každým dalším ze čtveřice. Kolik je potřeba švihadel?*

Obr. 5.1. Matematika pro 1. ročník, 1. díl, s. 60, Fraus

Podle našich zkušeností je tato úloha pro žáky výrazně jednodušší. Evidence švihadel (vybraných dvojic) je statická a trvalá. Lze je počítat v jakémkoliv pořadí bez nároků na krátkodobou paměť. Kdežto evidence podání rukou je procesuální a pomíjivá. K jednomu podání ruky je potřeba v mysli vytvořit představu a uložit ji do krátkodobé paměti. K tomu je třeba si pamatovat, kdo si s kým již podal ruku. Vzhledem k těmto kognitivním odlišnostem obvykle žáky nenapadá, že úloha je stejná“ jako u molekul a podávání rukou. Grafická vizualizace obou situací by „stejnost“ úloh pomohla jistě přiblížit.

5.1.5.1 Obměny úlohy

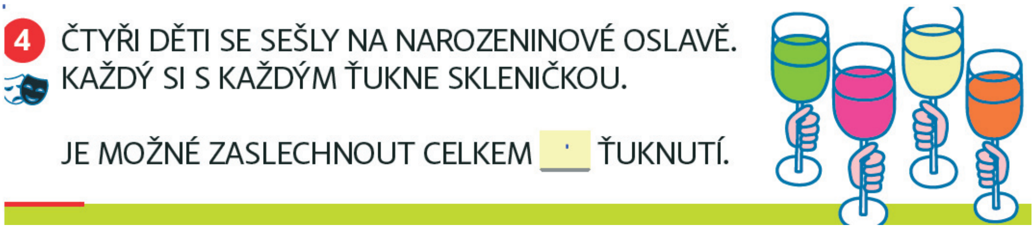
Cílová skupina: žáci 1. stupně ZŠ, 1. ročník i vyšší ročníky

Cíl úlohy: žáci obohacují své zkušenosti s jevy kombinatoriky, konkrétně s výběrem dvou prvků ze souboru 3, 4, … prvků a jejich organizací. Zaměří svoji pozornost na souvislosti mezi aritmetickými jevy a vztahy a evidují aritmetické jevy, např. pomocí tabulky, kterou mohou rozšiřovat

Potřebný čas na aplikaci:
Úloha 1c) 10 min, a více podle volby počtu dětí
Úloha 1d) 25 min

Jestliže v úloze zvětšíme počet objektů, můžeme ji posunout do vyššího ročníku.

Úloha 1c)



Obr. 5.2. Matematika pro 1. ročník, s. 110, cv. 4, H-MAT, o.p.s.

Úloha 1d) *Petra si pozvala na návštěvu kamarádky. Nejdříve přišla první a na přivítanou se políbily. Pak přišla druhá. Ta políbila Petru i již přítomnou kamarádku. Pak přišla třetí a nakonec čtvrtá a také každá políbila všechny přítomné kamarádky. Kolik polibků se uskutečnilo?*

5.1.5.2 Další obměny úlohy

Cílová skupina: žáci 1. stupně ZŠ, 3. a 4 ročník

Cíl úlohy: žáci rozšiřují své zkušenosti o další kontexty, v nichž se odehrává kombinatorika. V činnostech se seznamují s jevy kombinatoriky, konkrétně s výběrem dvou prvků ze souboru 3, 4, … prvků a jejich organizací. Zaměří svoji pozornost na souvislosti mezi aritmetickými jevy a vztahy a evidují aritmetické jevy, např. pomocí tabulky, kterou mohou rozšiřovat

Potřebný čas na aplikaci:
Úloha 1e) 10 min, a více podle volby počtu dětí
Úloha 1f) 25 min,
Úloha 1g) 30 min
Úloha 1h) 30 min
Úloha 1i) jedna vyučovací hodina

Úloha 1e) *Na obrázku jsou 4 body A, B, C, D. Kolik úseček je jimi určeno?*

Úloha 1f) *Čtyři fotbalové týmy hrají turnaj systémem každý s každým. Kolik zápasů je nutno odehrát?*

Úloha 1g) *Projdi dané schéma a přečti jméno KAREL. Kolika způsoby lze schématem projít?*

```
K — A — R
|   |   |
A — R — E
|   |   |
R — E — L
```

Úloha 1h) *Kolik různých věží můžeš postavit ze dvou červených a dvou žlutých krychlí?*

5.1.5.3 Evidence řešení úlohy třídou

Úloha 1i) Na narozeninové oslavě se sešlo více kamarádek. Každá si přiťukla s každou. Kolik ťuknutí bychom mohli slyšet, když budou na oslavě 2, (3, 4, 5, 6, …*n*) kamarádky.

Ze zápisků jedné z autorek článku: Tuto poslední úlohu jsem viděla, jak ji řešili žáci 4. ročníku. Popíši zde několik zajímavostí.

- Do počtu pět žáci řešili jen v lavici, nákresem nebo v představě. Od počtu šest se sami rozhodli, že si to musí sehrát. Šest dětí se postavilo před třídu a simulovali ťukání skleničkami. Několikrát se ozvalo: „S tebou sem už ťuknul," a při několika pokusech jim vyšla různá čísla. Organizace dramatizace se zdála být nejnáročnější částí procesu řešení. Nakonec se žáci domluvili, že se postaví do kruhu. Ani to nepřineslo spásu, neboť si ťuknul první s druhým, druhý se třetím, …, šestý s prvním a pak chvíli nevěděli, jak dál. Nakonec se žák Adam ujal celé organizace. Využil kruhu a nejdříve sám obešel všech pět žáků a jakoby si ťuknul a napočítal do pěti. Pak se postavil trochu stranou a poslal dalšího žáka, aby udělala totéž, pokračoval v počítání a napočítal do devíti. Nakonec zvládli i rozpačitý konec, když zůstali ve hře jen dva žáci. Výsledkem 15 si byli jisti.
- Do hry vstoupil další, sedmý žák. Adam navrhnul, aby si každý žák vzal do ruky lahev na pití a skutečně si přiťukli. Dramatizace pak probíhala ve velkém nadšení i pro počet 8, 9, 10 a vždy znovu od začátku. Nikdo neměl potřebu využít již toho, co bylo spočítáno.
- Při počtu 10 vstoupila do akce paní učitelka a nabídla, aby si dílčí výsledky nějak ukládali, že jich třeba budou umět využít pro další počítání.
- Na tabuli vzniknul chaos čísel, že kterých se jen těžko dalo něco vyčíst, a tak žáci pokračovali v sehrávkách dál.
- Žák Bedřich se dramatizací neúčastnil a soustředěně něco počítal. Nakonec radostně vykřikl, že když se účastní všech 16 žáků třídy, že se ozve 120 ťuknutí a že to umí spočítat i pro 50 žáků. Ukázal spolužákům svou tabulku (tab. 5.2):

Tab. 5.2.

2	3	4	5	6	7	….	15	16	50
1	3	6	10	15	21	….	105	120	$50 \cdot 49 : 2$

<u>K zamyšlení</u>

I. Navrhněte, jak byste přivedli Bedřicha k algebraickému zápisu?

Bedřich objevil, jak se chová řada čísel v dolním řádku tabulky, a také objevil, jaký je vztah mezi čísly horního a dolního řádku. Slovy Teorie generických modelů, prošel etapami izolovaných modelů budoucího poznatku *Vazba mezi počtem dětí a počtem ťuknutí* – to byly ty první pokusy, které počítal každý zvlášť. Pak si všimnul, že čísla v dolním řádku se chovají zvláštně – jejich postupné přírůstky se zvětšují vždy o 1. Byl schopen dál doplňovat tabulku. Říkáme, že žák dospěl na úroveň generického modelu procesuálního. Nakonec objevil, jak číslo v horním řádku souvisí s číslem v dolním řádku pod ním – objevil generický model konceptuální.

Nyní již je jen malý krok k formulaci abstraktního poznatku, to znamená jazykem písmen vyjádřit danou vazbu. Osvědčil se nám následující postup, kdy učitel klade jen otázky:
U: „Jak by to bylo, kdyby žáků bylo celá naše škola, tedy 230?“ Učitel se jen ujistí, že skutečně je žák již na úrovni generického modelu.
U: „Tak já si tady na papír napíši nějaké číslo, to bude počet žáků, a ty mi řekni, co mám s tím číslem udělat, abych získala počet ťuknutí.“
Ž: „Vezmi to číslo, vynásob ho s číslem o jednu menším a pak vyděl dvěma a dostaneš počet ťuknutí.“
U: „Aha, mohl bys to prosím, napsat na tabuli?“
Ž: „Jak to mám napsat?“
U: „No, jak to říkáš.“
Ž: Píše na tabuli celou větu: *Vezmi své číslo, pak ho vynásob* ….., pak přestane psát a po chvilce rychle napíše: *čís · (čís – 1) : 2 = ťuky*

Do konce hodiny, nejdéle příští hodinu dojde k vylepšení zápisu hledaného vztahu, kterým žák vstoupil do oblasti algebry: $c \cdot (c - 1) : 2 = t$.

To je již abstraktní poznatek, který se vyznačuje změnou jazyka – jazyk čísel se postupně proměnil v jazyk písmen. Písmena mu pomohla popsat nekonečnou řadu aritmetických vztahů.

5.1.5.4 Další ilustrace cesty od aritmetiky k algebře – objevení vazby

Cílová skupina: žáci 1. stupně ZŠ, 2. a 3. ročník

Cíl úlohy: žáci zaměřují svoji pozornost na souvislosti mezi aritmetickými jevy a vztahy a evidují aritmetické jevy, např. pomocí tabulky, kterou mohou rozšiřovat.

Potřebný čas na aplikaci: úloha 2) 30 min a více

Úloha 2. *Na kynologickém cvičišti byli cvičitelé a každý měl jednoho psa. Doplň tabulku 5.3, ve které je počet cvičitelů dán. Doplňte počet psů, počet hlav, počet očí a počet nohou.*

Tab. 5.3.

cvičitelů	1	2	3	4	5	15	40	72	100
psů									
hlav									
očí									
nohou									

První dva sloupce tabulky může učitel dát již v **prvním** ročníku. Samozřejmě ne ve tvaru tabulky, ale jako prostou slovní úlohu. Tam žáci zjistí, že hlavy jsou 2, oči jsou 4 a nohou je 6. Někteří žáci budou schopni to zjistit pro dva cvičence, případně dokonce pro tři. Úloha 2 tak, jak je uvedena s tabulkou, je určena žákům 2. ročníku.

Ve vyšších ročnících je možné k situaci se vracet s cílem budovat jazyk algebry.

Čísla v prvním a druhém řádku jsou stejná, neboť každý cvičitel má právě jednoho psa a předpokládáme, že jiní lidé kromě cvičitelů zde nebyli a nebyli zde ani psi, kteří nikomu nepařili. Žák, který případně upozorní na to, že výše uvedené podmínky je nutné do textu úlohy doplnit, má přesné myšlení.

Za uvedených okolností číslo ve třetím řádku je 2násobek, číslo ve čtvrtém řádku je 4násobek a číslo v pátém řádku je 6násobek čísla prvního řádku.

Úloha je jednoduchá, protože všechny závislosti si žák dobře umí představit, a proto je vhodná k další třídní diskusi.

Ve **druhém** ročníku otevře učitel problematiku vztahů otázkou: „Když vím, kolik bylo cvičenců, jak zjistím počet psů a jak zjistím počet hlav?“

Žáci odpovědí: „Psů je stejně jako cvičenců a hlav je dvojnásobek“.

Ve stejném duchu pak učitel mluví o počtu očí a počtu nohou. Některým žákům to bude jasné až ve třetím ročníku.

Ve **třetím** ročníku pak učitel žádá, aby žáci odhalili i další vztahy, jako například „hlav je polovina počtu očí a cvičenců je čtvrtina počtu očí“. Navíc učitel žádá, aby vztahy, popsané akusticky, byly zapsány písmem. Učitel vyvolá žáka, který nerad píše, a na tabuli se objeví například takovéto zápisy (poslední je náročný):

psi = cvičitelé; hlavy = 2 · cvičit.; oči = 4 · cvič.; nohy = 6 · cv.; cv. = $\frac{1}{2}$ · hlavy

Žák nepíše vše, slovo „cvičitel“ zkracuje. To je první krok k zavedení jazyka písmen. Opět nutno dodat, že někteří žáci budou schopni samostatně tvořit podobné zápisy později až ve čtvrtém ročníku.

Ve **čtvrtém** ročníku využije učitel předcházející krácení slov žáky a řekne, že to uděláme důsledně. Zavede označení: C = počet cvičenců, H = počet hlav, O = počet očí, N = počet nohou.

Vyzve žáky, ať zapíší, jak se čísla H, O a N dají vypočítat z čísla C. Žáci zapíší:

$H = 2 \cdot C$, $O = 4 \cdot C$, $N = 6 \cdot C$, někteří zapíší i $C = \frac{1}{2} \cdot H$, $C = \frac{1}{4} \cdot O$, $C = \frac{1}{6} \cdot N$.

Opět nutno dodat, že někteří žáci budou schopni samostatně tvořit podobné zápisy až v pátém, nebo dokonce v šestém ročníku.

V **pátém** ročníku jsou někteří žáci schopni napsat i nejsložitější vztahy popsané situace:

$$H = \frac{1}{2} \cdot O = \frac{1}{3} \cdot N; \quad N = \frac{3}{2} \cdot O, \quad O = \frac{2}{3} \cdot N.$$

Celý zde popsaný proces budování jazyka písmen se odehrává v různých situacích, takže zásoba zkušeností, které žák nabývá, je široká.

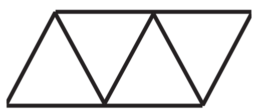
5.1.5.5 Ilustrace úlohy, která vychází z geometrické situace

Cílová skupina: žáci 1. stupně ZŠ, 2. až 4. ročník

Cíl úlohy: žáci evidují aritmetické jevy pomocí tabulky a hledají souvislosti mezi aritmetickými jevy a vztahy

Potřebný čas na aplikaci: úloha 3) 30 min i více

Úloha 3. *Z dřívek je vytvořena řada několika rovnostranných trojúhelníků (na obrázku jsou to 4 trojúhelníky). Urči, kolik dřívek je třeba na vytvoření 1, 2, 3, 4, 5, …10, 20, 50 trojúhelníků. Kolik dřívek je třeba, když počet trojúhelníků bude myšlené číslo t?*



Obr. 5.3. Řada trojúhelníků z dřívek

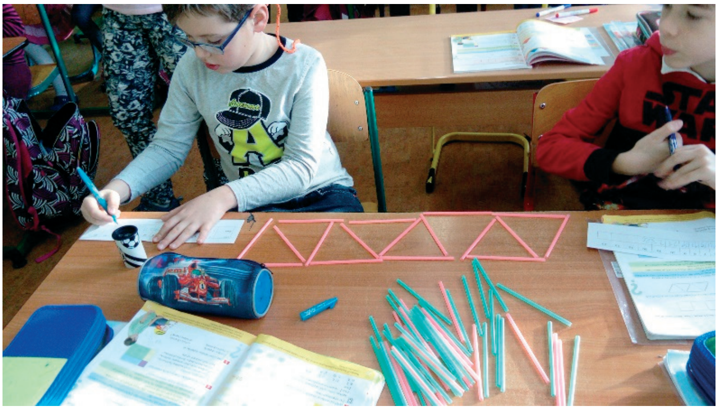
Žáci **druhého** ročníku si dílčí výsledky zapíší do tabulky 5.4 a zjistí, že v druhém řádku čísla rostou po dvou – jsou to vesměs čísla lichá.

Tab. 5.4

trojúhelníků	1	2	3	4	5	6	…	10	…	20
dřívek	3	5	7	9	11	13	…	21		41

Žáci **čtvrtého** (někdy i třetího) ročníku z posledních dvou sloupců odhalí, že „dřívek je dvakrát tolik, co trojúhelníků, a navíc ještě jedno“. Zapíší to: $d = 2 \cdot t + 1$.

Následující tři fotografie (obr. 5.4, 5.5 a 5.6) dokumentují proces řešení této úlohy žáka 3. ročníku, který měl potřebu si modelovat 50 trojúhelníkových okének. Učitelka nijak žáka neurychlovala a tuto zkušenost mu dopřála.



Obr. 5.4

Obr. 5.5

Obr. 5.6

5.1.6 Závěr první části

V první části kapitoly jsme se zaměřili na rozvoj schopností žáků 1. stupně ZŠ, které lze efektivně rozvíjet v matematice a které jsou součástí matematické (a nejen matematické) gramotnosti. Ukázali jsme, jak je cesta od aritmetických zkušeností žáka k zavedení velice abstraktního jazyka algebry dlouhá a náročná. Náročná je především na trpělivost učitele a jeho znalost poznávacího procesu v matematice, který zajistí žákovo porozumění. Z tohoto důvodu jsme nabídli série úloh, které lze aplikovat od 1. ročníku a které zajistí prožitky různými smysly. Zkušenost, která žákovi projde rukama, pohybem jeho těla, všemi smysly, je cenná, trvalá a umožní žákovi hlubší porozumění.

Také jsme se zabývali vztahem žáka k matematice, neboť ten je klíčový pro rozvoj jakýchkoliv schopností žáka.

5.1.7 Literatura k první části

HEJNÝ, Milan. *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně ZŠ.* Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2014. ISBN 978-80-7290-776-2.

JIROTKOVÁ, Darina. *Cesty ke zkvalitňování výuky geometrie* [online]. V Praze: Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2010 [cit. 2019-10-09]. ISBN 978-80-7290-399-3. Dostupné z: http://kramerius4.nkp.cz/search/handle/uuid:db333ca0-93d7-11e8-87bd-005056827e52

Rozvoj matematické gramotnosti na základních a středních školách ve školním roce 2017/2018. Tematická zpráva. Česká školní inspekce. Praha, leden 2018. Dostupné z: http://www.csicr.cz/html/2019/TZ_matematicka_gramotnost_2017_2018/html5/index.html?&locale=ENG&pn=1

Summary

In the first part of this chapter we focus on the abilities of primary school pupils which could be developed in mathematics lessons and which are considered as a part of mathematical literacy. We showed how the way from early arithmetical experience to very abstract language of algebra is long and demanding. Demanding particularly to the patience of the teachers and their knowledge of learning process in mathematics which enable pupil´s understanding. From this reason we offered series of tasks which could be applied from 1st grade and in which the pupils experience use different perceptions. Experience, which pupils get through their hands, body movement, all perceptions is very precious, is long lasting and enable pupils deeper understanding.

The chapter also deals with the pupil´s approach towards mathematics, since this is key phenomenon for the development of any pupil´s abilities.

5.2 Od aritmetiky k algebře na 2. stupni ZŠ

Antonín Jančařík

Abstrakt:
Druhá část této kapitoly se zabývá postavením a vzájemnými vazbami aritmetiky a algebry na 2. stupni ZŠ. Cílem autorů je představit několik aktivit, které tyto dvě disciplíny propojují. Jednotlivé aktivity se zaměřují na využití algebraických rovností pro konkrétní výpočty v rámci aritmetiky. Aktivity pomáhají překlenout hranici mezi oběma disciplínami, snaží se na praktických úlohách ukázat, jaký je význam a praktické využití vzorců, které se žáci učí v algebře. Jednotlivé úlohy jsou vhodným nástrojem pro procvičování, ale také pro diagnostiku aktuálního porozumění problematice u žáků.

Klíčová slova:
algebra, aritmetika, aplikace algebry, diagnostika, odmocnina, faktorizace

Abstract:
The second part of this chapter focuses on the role of and connections between arithmetic and algebra on lower secondary school level. The goal of the authors is to introduce several activities that link these two disciplines. The activities focus on the use of algebraic identities for specific calculations within arithmetic. The activities help to bridge the boundary between the two disciplines. Using practical tasks the authors of the chapter try to show the meaning and practical use of formulas pupils learn in algebra. The tasks are a suitable tool for practicing but also for diagnosis of current level of pupils' understanding of the problem.

Keywords:
algebra, arithmetic, application of algebra, diagnostics, square root, factorization

5.2.1 Cíle výuky algebry na 2. stupni ZŠ

Vyjdeme-li z rámcových vzdělávacích plánů pro základní školu (2013), nalezneme aritmetiku i algebru v rámci oblasti nazvané Číslo a proměnná. Algebra je zde zastoupena dvěma očekávanými výstupy. Prvním z těchto výstupů je M-9-1-07 – žák matematizuje jednoduché reálné situace s využitím proměnných; určí hodnotu výrazu, sčítá a násobí mnohočleny, provádí rozklad mnohočlenu na součin pomocí vzorců a vytýkáním.

Druhý pak představuje aplikovanou podobu algebry, M-9-1-08 – žák formuluje a řeší reálnou situaci pomocí rovnic a jejich soustav.

K těmto výstupům se pak váží dva body učiva:

výrazy – číselný výraz a jeho hodnota; proměnná, výrazy s proměnnými, mnohočleny
rovnice – lineární rovnice, soustava dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými.

Zde je tedy odpověď, co máme v rámci algebry na druhém stupni učit. Nenalézáme zde však odpověď na to, proč to máme vyučovat, resp. co je cílem této výuky. Někteří kritici školské matematiky poukazují na to, že úpravy, které se žáci pracně učí, dnes zvládne i obyčejný telefon. Stačí výraz či rovnici vyfotografovat a následně si na displeji přečíst řešení, včetně postupu. Proč tedy ztrácet čas?

Pokusím se na tuto otázku odpovědět. Kapitola, ve které je popsán vzdělávací obsah oboru, je až druhou kapitolou věnovanou vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace. První kapitolou je charakteristika vzdělávací oblasti, v rámci které nalezneme i cílové zaměřené oblasti, tedy důvody, proč matematiku vyučujeme a k čemu máme žáka v rámci vyučování matematice vést. Pokusím se uvést tři cíle, které se přímo vztahují k algebře:

1) Při výuce algebry vedeme žáka k rozvíjení paměti prostřednictvím numerických výpočtů a osvojování si nezbytných matematických vzorců a algoritmů. Tedy jedním z důvodů, proč chceme, aby si žáci zapamatovali nejrůznější vzorce a algoritmy je i to, že chceme touto cestou rozvíjet specifickou formu paměti, kterou pak bude žák moci používat celý život.
2) Při výuce algebry vedeme žáka k přesnému a stručnému vyjadřování užíváním matematického jazyka včetně symboliky, prováděním rozborů a zápisů při řešení úloh a ke

zdokonalování grafického projevu. Tedy učíme žáka jazyk, který umožňuje žákovi přesně popisovat vztahy mezi proměnnými, provádět zápis zadání a v případě potřeby i úlohy řešit.

3) Při výuce algebry vedeme žáka k rozvíjení důvěry ve vlastní schopnosti a možnosti při řešení úloh, k soustavné sebekontrole při každém kroku postupu řešení, k rozvíjení systematičnosti, vytrvalosti a přesnosti. Zde nacházíme důvod, proč nestačí, aby žák vyfotil zadání a následně opsal řešení. Tímto postupem, na rozdíl pečlivé práce s algebraickými výrazy, se nemůže naučit systematičnosti, vytrvalosti a přesnosti. Na opisování se nemusí soustředit, netrénuje si sebekontrolu, a tudíž si ani nemůže rozvíjet důvěru ve vlastní schopnosti a možnosti při řešení úloh.

5.2.2 Aritmetika a algebra

Aritmetika a algebra jsou dvě rozdílné matematické disciplíny, které však spolu úzce souvisí. Zatímco na aritmetiku můžeme hledět jako na počítání s čísly, lze algebru chápat, především ve školní matematice, jako počítání bez čísel. Díky počítání příkladů s čísly se žáci seznamují s prvními algebraickými vlastnostmi jednotlivých početních operací a na druhou stranu abstraktní algebraické vlastnosti nám mohu usnadnit počítání s konkrétními čísly.

Ukázka
Při dělení dvojciferným číslem část žáků postupuje tak, že dělitele zaokrouhlí na desítky, odhadne výsledek a pak spočte konkrétní násobek dělitele a odečte. Při tomto postupu někdy dochází k tomu, že odhad je chybný a je nutné jej upravit, znovu vynásobit a odečíst. Jednoduchou pomůckou, která výpočet zefektivní, je před vlastním dělením vypsání všech násobků dělitele od 1 do 10 a pak v procesu dělení jen dohledávání potřebného násobku. Při seznamování žáků s tímto postupem bylo opakovaně pozorováno, že velká část žáků u každého násobku znovu násobí. Přitom mnohem jednodušší a rychlejší je dělitele opakovaně přičítat.

Při situaci v ukázce žáci sice vědí, že násobení představuje opakované sčítání, nedokáží však tento poznatek aktivně aplikovat. V této situaci může učitel v souladu s Vygotského teorií zóny nejbližšího vývoje žáky na tento fakt upozornit, a tak jim pomoci jej ve svých výpočtech používat. Mimochodem vypisování všech násobků až po deset je velmi důležité, protože správnost toho násobku si může žák snadno zkontrolovat. Díky tomu získává již v průběhu řešení zpětnou vazbu a první utvrzení, že postupuje správně.

5.2.3 Jak rozpoznat algebraické znalosti v aritmetice

Z pohledu učitele je velmi zásadní schopnost správně určit stupeň poznání, ve kterém se žák nachází a dle něj přizpůsobit výklad látky i úkoly, které jsou mu předkládány k řešení. U algebraických dovedností můžeme úroveň aktuálního poznání dobře rozpoznat ze způsobu, jakým žák počítá. Například jestli u součtu řady čísel používá efektivně asociativnost a komutativnost operací k tomu, aby si výpočet zjednodušil (Při výpočtu součtu 7 + 6 + 3 nejprve vypočte 7 + 3 a následně přičte 6). Mnoho příležitostí pro diagnostiku nám nabízí také následující aktivita.

Cílová skupina: žáci 2. stupně ZŠ

Cíle úlohy: rozvíjení početní dovedností žáků

Potřebný čas na aplikaci: 10–15 minut na představení aktivity; délka hry v jedné vyučovací hodině 5 minut; zařazovat hru lze průběžně do hodin matematiky

Hra desítka
Náhodně vylosujeme 4 čísla od 1 do 10 (doporučujeme používat karty na hru Ligretto). Úkolem žáků je z vylosovaných čísel sestavit matematický výraz, ve kterém je každé číslo použito právě jednou, neobsahuje jiná čísla a jehož hodnota je 10 (Jančařík, 2007).

Tuto aktivitu lze realizovat s celou třídou, protože efektivně rozvíjí početní dovednosti. Při opakovaném hraní se však rychlost odpovědí na tolik zvýší, že již není možné ji hrát s celou třídou najednou. Osvědčilo se rozdělovat žáky do dvojic a hrát hru v každé dvojici samostatně, žáci se kontrolují navzájem.

Pokud učitel neukončí hru po prvním správném řešení, ale dá prostor dalším žákům k nalezení dalších kombinací, velmi často dochází k diskuzím na téma, které výrazy jsou stejné a které různé. Tyto diskuze poskytují učiteli cenné poznatky o tom, jak žáci na konkrétní operace nahlíží a které jejich algebraické vlastnosti již mají natolik zažité, že jejich použití v jejich chápání nemění výraz.

Např. $5 \cdot (3 + 6 - 7)$ a $(6 + 3 - 7) \cdot 5$, nebo $((5 + 3) : 4) \cdot 5$ a $(5/4) \cdot (3 + 5)$.

Součet řady lichých čísel
Při počítání s čísly mohou žáci objevovat mnoho různých vztahů, které mezi čísly platí. Například, že součin dvou lichých čísel je vždy lichý. Tyto vlastnosti lze následně také popsat pomocí vzorců. Jednou z takových číselných zákonitostí je to, že součet řady lichých čísel je vždy čtverec:

$1 = 1, \quad 1 + 3 = 4, \quad 1 + 3 + 5 = 9, \quad 1 + 3 + 5 + 7 = 16, \quad 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25, \ldots$

Pokud je taková vlastnost objevena, je důležité zjistit, zda se jedná jen o náhodu, nebo existuje pro nalezený vztah nějaký důvod a lze dokázat, že tato vlastnost platí ve všech případech. Důkaz tvrzení nemusí být vždy v podobě algebraické, ale lze u některých tvrzení může mít i grafickou podobu (obr. 5.7).

9	9	9	9	9
7	7	7	7	9
5	5	5	7	9
3	3	5	7	9
1	3	5	7	9

Obr. 5.7

Otázkou je, zda žák dovede uvedený poznatek i aplikovat pro výpočty, např. pokud má vypsat několik po sobě jdoucích druhých mocnin, zda bude násobit, nebo přičítat.

$25^2 = 625$, kolik je 26^2?

$26^2 = 25^2 + 51 = 625 + 51 = 676$.

Uvedený výpočet může samozřejmě vycházet jak z uvedeného pozorování, tak z aplikace vzorce $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$.

5.2.4 Využití algebraických rovností pro aritmetické výpočty

Výše uvedená rovnost není jedinou, kterou mohou žáci pro výpočty použít. V dalším textu si ukážeme několik dalších vzorců a jejich využití v aritmetice.

$\boldsymbol{(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2}$

Možná je to překvapivé, ale tato základní rovnost, se kterou se seznamují žáci na druhém stupni základní školy, je hlavním nástrojem, který je používán při pokusech o prolomení šifry RSA. Díky ní lze totiž v některých případech rozložit čísla na součin prvočísel.

Cílová skupina: žáci 9. ročníku ZŠ

Cíle aktivit: ukázat na praktické využití algebraických znalostí pro aritmetické výpočty

Potřebný čas na aplikaci příkladů: jedna vyučovací hodina (pro následující dvě úlohy)

Příklad
Víte, že 221 = 225 – 4. Rozložte 221 na součin prvočísel.

Řešení
Protože víme, že $225 = 15 \cdot 15$ a $4 = 2 \cdot 2$,
dostáváme $221 = 15^2 - 2^2 = (15 - 2) \cdot (15 + 2) = 13 \cdot 17$.
Obdobným způsobem lze rozložit i čísla $143 = 144 - 1$, $323 = 324 - 1$ či $187 = 196 - 9$.

$\boldsymbol{(10 + a) \cdot (10 + b) = 100 + 10 \cdot (a + b) + a \cdot b}$

Tuto jednoduchou rovnost lze použít pro snadné výpočty součinů čísel o málo větších než 10 pomocí prstů. Stačí na prstech první a druhé ruky ukázat, o kolik je první, resp. druhé číslo větší než deset a následně dopočíst výsledek, vzít sto, přičíst tolik desítek, kolik ukazujeme prstů a následně přidat součin ukázaných prstů.

Příklad
Chceme spočítat kolik je 13x14. Na první ruce ukážeme 3 prsty, na druhé 4 prsty. Výsledek je pak sto plus sedmdesát (vidím 7 prstů) plus dvanáct, tedy sto osmdesát dva.

Aktivitu můžeme ve výuce zavést tak, že žákům ukážeme, jak se výpočet provádí a následně je vyzveme, aby se pokusili zjistit, proč postup funguje, a aby dokázali, že je správný.

$$\mathbf{(10}\boldsymbol{a} \mathbf{+} \boldsymbol{b}\mathbf{)} \cdot \mathbf{(10}\boldsymbol{a} \mathbf{+} \boldsymbol{b}\mathbf{)} \mathbf{= 100}\boldsymbol{a}^{\mathbf{2}} \mathbf{+} \boldsymbol{b} \cdot \mathbf{(20}\boldsymbol{a} \mathbf{+} \boldsymbol{b}\mathbf{)}$$

Uvedená rovnost je základem pro rychlejší počítání druhé mocniny a především pro výpočet odmocniny z daného čísla.

Cílová skupina: žáci 9. ročníku ZŠ

Cíle aktivit: ukázat na praktické využití algebraických znalostí pro aritmetické výpočty

Potřebný čas na aplikaci příkladů: jedna vyučovací hodina (pro následující tři příklady)

Příklad
Chceme spočítat kolik je druhá mocnina z čísla 321. Dvakrát použijeme uvedenou rovnici, poprvé pro výpočet 32^2 a následně pro dopočítání 321^2.

Řešení

	3	**2**	**1**		
	9				
	1	2	4		
			6	4	1
1	**0**	**3**	**0**	**4**	**1**

Na prvním řádku počítáme 3^2, ve druhém přidáváme 62 · 2 a ve třetím 641 · 1.

Uvedený postup lze samozřejmě i obrátit a můžeme pomocí něj zadané číslo odmocnit (Dvořáková, Škarda, 2014).

Příklad
Nalezněte druhou odmocninu čísla 354217.

Řešení

3	5	4	2	1	7	=	5	9	5
2	5								
1	0	4	2						
	9	8	1						
		6	1	1	7				
		5	9	2	5				
			1	9	2				

V prvním kroku odečítáme 5 · 5, ve druhém 109 · 9 a ve třetím 1185 · 5.
Zjišťujeme, že odmocnina z čísla 354217 je 595 a zbytek 192, tedy, že platí:
354 217 = 595 + 595 + 192.

Pokud bychom chtěli výpočet s větší přesností, můžeme pokračovat ve výpočtu. V praxi je znalost algoritmu vhodná pro odhad velikosti odmocniny z daného čísla.

Příklad
Čtvercová zahrada má plochu 1756 m^2, odhadněte délku její strany.

Řešení
Z první iterace algoritmu je zřejmé, že délka strany bude více než 40 metrů (16 < 17 < 25), z druhé pak, že bude o něco málo menší než 42 metrů (156 < 82 · 2).
Délka strany je přibližně 42 metrů.

5.2.5 Závěr druhé části

Aritmetika a algebra spolu velmi úzce souvisí. Ve školní praxi je jedním z první algebraických témat zavádění a využívání součinových vzorců. V úlohách, které učebnice nabízí, je však jen velmi málo aplikací těchto vzorců na aritmetické výpočty. Proto jsme se v rámci tohoto textu snažili předložit několik praktických námětů, jak učivo algebry a aritmetiky propojovat a tak usnadnit žákům přechod od výpočtů s čísly k algebraickým výrazům.

5.2.6 Literatura k druhé části

DVOŘÁKOVÁ, Ľubomíra a Čeněk ŠKARDA. Pomoc od bezmoci z odmocnin. *Učitel matematiky*. Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 2014, 23(1), str. 35-44. ISSN 1210-9037.

JANČAŘÍK, Antonín. *Hry v matematice*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2007. ISBN 978-80-7290-339-9.

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. [online]. Praha: MŠMT, 2013. 142 s. [cit. 2019-07-07]. Dostupné z: http://www.nuv.cz/file/433_1_1/

Summary

The second part of this chapter focuses on the role of and connections between arithmetic and algebra on lower secondary school level. The goal of the authors is to introduce several activities that link these two disciplines. In the theoretical introduction, the authors introduce 3 goals of teaching algebra on elementary school. The practical part then presents four specific activities:

- Ten game
- Sum of a series of odd numbers
- Use of algebraic identities in search for factorization
- The square root algorithm

The activities focus on the use of algebraic identities for particular calculations within arithmetic. The activities help to bridge the boundary between the two disciplines. Using practical tasks the authors of the chapter try to show the meaning and practical use of formulas pupils learn in algebra.

The tasks are a suitable tool for practicing but also for diagnosis of current level of pupils' understanding of the problem.

6 Řešení (slovních) úloh ve vyučování matematice

Jarmila Novotná, Hana Nováková

Abstrakt:
Hlavním cílem materiálu je seznámit čtenáře s různými heuristickými (nealgoritmickými) strategiemi řešení hlavně slovních úloh. Pozornost je zaměřena na důležitost a role situací, které podporují matematickou tvořivost žáků (nalézání vlastních řešitelských postupů v nestandardních situacích), a na možnosti, které má učitel pro to, aby změnil přístup žáků k řešení úloh od řešení pomocí algoritmu, který jim byl předložen, směrem k vlastnímu tvořivému hledání vhodných, i když někdy „neškolských" řešitelských strategií. Zdůrazněna je důležitost a priori analýzy úlohy podle teorie didaktických situací v matematice. Výklad a ukázky analýz a priori několika úloh jsou doplněny informaci ze zařazení úloh do vyučování a ukázkami žákovských prací. I když uvedená ukázka proběhla v jedné vyučovací hodině, je možné ji realizovat i v několika částech v různých vyučovacích hodinách.

Klíčová slova:
řešení úloh, heuristické strategie, a priori analýza, teorie didaktických situací v matematice

Abstract: The main aim of the material is to acquaint the reader with different heuristic (non-algorithmic) solving strategies for word problems. The attention is paid to the importance and role of situations supporting pupils' mathematical creativity (finding individual solving procedures in non-standard situations) and to possibilities that the teacher has for changing pupils' approaches from using a presented algorithm to looking for appropriate, sometimes even "non-scholar" solving strategies. The importance of a priori analysis of the problem according to the Theory of didactical situation in mathematics is emphasized. The presentation and examples of a priori analyses of selected problems are accompanied by information about possible use of problems in lessons and about original pupils' solutions. Although the presented teaching unit was conducted in one lesson, it may be divided into several activities and be conducted in a series of lessons.

Keywords:
problem solving, heuristic strategies, a priori analysis, theory of didactical situations in mathematics

6.1 Úvod

Základem úspěšného učení se matematice je řešení úloh, které pomáhá rozvoji tvořivosti, jejímu rozšiřování a kultivaci. V tomto materiálu se zaměříme na slovní úlohy. Pod pojmem slovní úloha budeme rozumět ve shodě např. s (Kuřina, 1989, s. 61) takovou úlohu, v jejímž zadání se vyskytují objekty, jevy a situace z nejrůznějších mimomatematických oblastí.

Řešení slovních úloh patří mezi ty části školské matematiky, které jsou pro žáky v mnoha případech velmi obtížné. Mají však významnou roli hlavně proto, že většina životních situací je popsána slovy a řešení slovních úloh je jednou z mála oblastí ve školské matematice, která vyžaduje matematizaci situací zadaných slovně a zpětnou transformaci získaného matematického řešení do kontextu úlohy (Novotná, 2000).

V tomto metodickém materiálu se zaměřujeme na strategie, které jsou vhodné pro použití při řešení slovních úloh, a na jejich využití žáky při řešení.

6.2 Řešení úloh

6.2.1 Úvodní informace

Pólya (1981, s. ix) charakterizuje řešení úlohy takto: „Řešit úlohu znamená najít cestu z obtížné situace, cestu, jak obejít překážku, cestu k dosažení cíle, který nebyl bezprostředně dosažitelný." Způsoby, kterými lze úlohy řešit, rozdělujeme v souladu s (Eisenmann, Novotná, Přibyl, v tisku) do tří základních skupin: přímý způsob, užití heuristické strategie, pokus. *Přímý způsob* řešení úlohy spočívá v zopakování naučeného postupu nebo v přímém využití znalosti. *Užití heuristické strategie* odpovídá situaci, kdy žák je vnitřně motivován k tomu, aby úlohu vyřešil, ale k vyřešení mu chybí znalost, naučený postup, dovednost. Heuristickou strategii (někdy též heuristický přístup či heuristiku) vymezujeme jako proces řešení úloh založený na hledání, zkoumání a experimentování. *Pokus* představuje situaci, kdy žákovi chybí vnitřní motivace k řešení úlohy. Výsledek prostě ‚odhadne' a obvykle ani nepožaduje zpětnou informaci o úspěšnosti. Žák totiž ve skutečnosti řeší problém ‚zbavit se úlohy'.

V řadě případů žáci sami, spontánně, používají heuristické strategie a jde přitom o přirozený proces. Stejně tak učitelé v řadě případů vhodným způsobem navádí žáky k použití heuristické strategie, byť to ani jedna strana vyučovacího procesu tak nenazývá. V souladu s autory (Eisenmann, Novotná, Přibyl, v tisku) „vycházíme z předpokladu, že pokud se bude o těchto strategiích řešení úloh hovořit ve výuce a žáci s nimi budou systematicky seznamováni, pak se žáci nejen zlepší v řešení úloh, ale jak ukazují výsledky experimentů, dojde i k rozvoji žáka jako takového".

V rámci projektu GAČR 407/12/1939 byly sledovány tyto řešitelské strategie, souhrnně označovány jako heuristické strategie: Pokus – ověření – korekce, Systematické experimentování, Analogie, Přeformulování úlohy, Použití řešitelského obrázku, Použití grafů funkcí, Vypuštění podmínky, Cesta zpět, Zobecnění a konkretizace (příp. Konkretizace a zobecnění), Zavedení pomocného prvku, Rozklad na jednodušší případy a Užití falešného předpokladu (Eisenmann, Novotná, Přibyl, 2015).

Nováková (2013) se zaměřila na analýzu a priori didaktických situací a na její vztah k přípravám na výuku matematiky v praxi učitelů matematiky. V teorii didaktických situací v matematice je analýza a priori popsána jako „profesní nástroj, který může učitelům při plánování výuky pomoci" (Nováková, 2013, s. 21). Jednou z hlavních složek analýzy a priori je vyhledání co nejvíce možných strategií řešení úloh (správných i chybných). Tuto část analýzy a priori ilustrujeme v druhé části metodického textu na konkrétní ukázce. Také zde porovnáváme předpokládaný průběh výuky se situací, jak se vyvinula při zařazení navržené situace v hodině.

6.2.2 Představení heuristických strategií použitých v projektu GAČR 407/12/1939[2]

6.2.2.1 Pokus – ověření – korekce

Tuto strategii řadíme ke strategiím, pomocí kterých se řešitel snaží experimentováním dojít k hledanému výsledku. Nejprve na základě svých zkušeností odhadne řešení předložené úlohy. Následně ověří, zdali toto řešení vyhovuje zadání. Další případný odhad již udělá na základě toho, jak vyšel předchozí výsledek. Takto postupuje dále až do nalezení řešení. Jednotlivými iteracemi se můžeme dobrat k požadovanému řešení, nebo alespoň nalézt řešení, které se od daného řešení liší chybou, která je pro nás již přijatelná. V případě, kdy způsob řešení úlohy je řešiteli neznámý, může získat experimentováním velmi dobrý vhled do úlohy. Tato strategie patří k nejuniverzálnějším.

Ilustrace

Zadání: Určete dvě po sobě následující lichá přirozená čísla tak, aby jejich součin byl 323. (Zadání úlohy je převzato a upraveno z (Cihlář, Zelenka, 1998, s. 89).)

Řešení: V tabulce 6.1 jsou ukázány iterační kroky pro jednotlivé zvolené hodnoty ilustrující proces řešení. Postupně volíme dvě po sobě jdoucí lichá čísla a zkoumáme jejich součin. Podle posledního sloupce se pak rozhodujeme, zda čísla zvětšíme, nebo zmenšíme, dokud nezískáme řešení.

Tab. 6.1

První liché číslo	Druhé liché číslo	Součin čísel	Je to číslo 323?
1	3	3	Není. To je (hodně) málo
11	13	143	Není. To je málo
21	23	483	Není. To je moc
19	21	399	Není. To je moc
17	**19**	**323**	**Ano. To je ono**

Odpověď: Hledanými čísly jsou čísla 17 a 19.

[2] Podrobnější popisy strategií a další ukázky jejich využití lze nalézt např. v (Eisenmann, Novotná, Přibyl, 2015, v tisku).

6.2.2.2 Systematické experimentování

Systematické experimentování je strategie, při které se řešitel pokouší nalézt řešení úlohy pomocí jednotlivých experimentů. Zahájení je stejné jako u strategie Pokus – ověření – korekce: Na základě svých zkušeností řešitel odhadne řešení předložené úlohy. Následně ověří, zdali toto řešení vyhovuje zadání. Pokud odhad nevyhovuje, systematicky mění vstupní hodnoty algoritmu tak dlouho, až nalezne správné řešení.

Ilustrace

Zadání: Část lístků do divadla stála 220 Kč a část byla po 160 Kč. Kolik bylo kterých, jestliže celková cena za 97 lístků byla 19 300 Kč?

Řešení: K samotnému experimentování využijeme tabulkový procesor. Zde uvedená tabulka 6.2 je krácena.

Tab. 6.2

Počet lístků za cenu 220 Kč	Cena v Kč	Počet lístků za cenu 160 Kč	Cena v Kč	Celkem v Kč
97	21 340	0	0	21 340
96	21 120	1	160	21 280
…	…	…	…	…
75	16 500	22	3 520	20 020
74	16 280	23	3 680	19 960
…	…	…	…	…
64	14 080	33	5 280	19 360
63	**13 860**	**34**	**5 440**	**19 300**
62	13 640	35	5 600	19 240
…	…	…	…	…
18	3 960	79	12 640	16 600
17	3 740	80	12 800	16 540
…	…	…	…	…
1	220	96	15 360	15 580
0	0	97	15 520	15 520

Odpověď: V divadle prodali 63 lístků po 220 Kč a 34 lístků po 160 Kč.

6.2.2.3 Analogie

Má-li řešitel řešit určitou úlohu, najde analogickou úlohu, tj. úlohu, která bude pojednávat podobným způsobem o analogickém objektu. Pokud se mu podaří tuto novou úlohu vyřešit, nebo pokud její řešení již zná, může často metodu jejího řešení nebo přímo výsledek použít i při řešení úlohy původní.

Ilustrace

Zadání: Na ujetí 420 km spotřebovalo auto 29 l benzínu. Jaká je jeho průměrná spotřeba benzínu na 100 km?

Řešení: Zformulujeme číselně jednodušší úlohu, která pomůže najít řešitelskou strategii: Na ujetí 200 km spotřebovalo auto 16 l benzínu. Jaká je jeho průměrná spotřeba benzínu na 100 km? Odpověď je zřejmá: výsledek vypočteme takto: $\frac{16}{\frac{200}{100}} = 8$; průměrná spotřeba benzínu na 100 km je 8 l. Stejným způsobem vyřešíme původní úlohu: $\frac{29}{\frac{420}{100}} \doteq 6{,}9$; průměrná spotřeba benzínu na 100 km je 6,9 l.

Odpověď: Průměrná spotřeba auta na 100 km je přibližně 6,9 l.

Poznámka: Při použití strategie Analogie je třeba dávat pozor na to, zda nově zformulovaná úloha je opravdu analogická se zadanou úlohou. Žáci často prohlašují za analogické situace, které ve skutečnosti analogické nejsou (příklad 2 < 3, analogicky -2 < -3).

6.2.2.4 Přeformulování úlohy

Při použití této strategie řešitel přeformuluje zadanou úlohu na novou, někdy zcela jinou, úlohu, která je pro něho snadnější k řešení a jejíž řešení je buď přímo řešením původní úlohy, nebo její řešení podstatně přibližuje. Speciálním a velmi důležitým případem této strategie je překlad úlohy z jednoho matematického jazyka do jazyka jiného (např. klasické úlohy geometrie, jako byla např. trisekce úhlu, se podařilo vyřešit ve chvíli, kdy byly přeloženy do jazyka algebry).

Ilustrace

Zadání: Rozhodněte, který zlomek je větší: $\frac{125}{126}$ nebo $\frac{124}{125}$.

Řešení: Přeformulujme zadanou úlohu např. takto: Mějme dvě stejné pizzy (shodné kruhy). První z nich rozdělíme na 125 shodných dílů, druhou na 126 shodných dílů. Z každé pizzy odebereme jeden díl. Ve které pizze toho zůstane více? Protože byl z druhé pizzy odebrán menší díl, musí v ní zbýt víc.

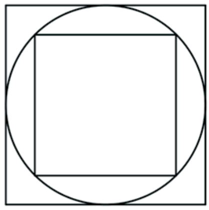
Odpověď: $\frac{124}{125} < \frac{125}{126}$.

6.2.2.5 Použití řešitelského obrázku

Řešitel znázorní zadání úlohy pomocí tzv. řešitelského obrázku. V něm označí to, co je dáno, a často i to, co chce získat. Může se stát, že při kreslení obrázku už uvidíme řešení úlohy. Ve většině případů však je před vyřešením třeba s obrázkem různě manipulovat (např. dokreslit nějaké pomocné prvky).

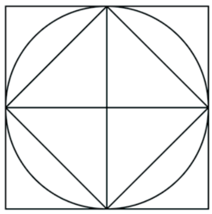
Ilustrace

Zadání: Mějme čtverec vepsaný do kruhu, přičemž tento kruh je vepsán do čtverce (obr. 6.1). Určete, jakou část obsahu většího čtverce zaujímá menší čtverec.



Obr. 6.1

Řešení. Úlohu snadno vyřešíme pomocí vhodného otočení menšího čtverce a doplnění jeho úhlopříček (obr. 6.2):



Obr. 6.2

Odpověď: Menší čtverec zaujímá polovinu obsahu většího čtverce.

6.2.2.6 Použití grafů funkcí

Pokud jsou v zadání úlohy funkce nebo pokud se při jejím řešení ukáže, že je vhodné nějaké funkce zavést, pak je obvykle vhodné si sestrojit grafy těchto funkcí. Takovéto grafy často velmi podstatným způsobem přispějí k nalezení řešení dané úlohy. Je to speciální případ použití řešitelského obrázku.

6.2.2.7 Vypuštění podmínky

Je zadána úloha, v níž je několik podmínek. Pokud řešitel není schopen při řešení takového problému splnit najednou všechny požadované podmínky, může si položit otázku: „Co přesně činí tento problém tak složitý?" Podaří-li se mu určit, která ze vstupních podmínek je tou obtížnou, může se pokusit ji vypustit. Jestliže se mu povede takto oslabenou úlohu vyřešit, k vypuštěné podmínce se vrátí a úlohu se pokusí dořešit.

Ilustrace

Zadání: Sestrojte obdélník *ABCD*, jehož strany jsou v poměru 3 : 2 a jehož úhlopříčka má délku 7 cm.

Řešení: Vypustíme-li podmínku „úhlopříčka má délku 7 cm“, dostáváme velmi jednoduchou úlohu. Sestrojíme obdélník *AKLM*, jehož strany budou mít délku např. 3 cm a 2 cm. Hledaný obdélník je pak se sestrojeným obdélníkem stejnolehlý podle středu *A*. Vrchol *C* tedy leží na polopřímce *AL* ve vzdálenosti 7 cm od vrcholu *A*. Další část konstrukce je zřejmá.

6.2.2.8 Cesta zpět

V matematice se jedná o často užívanou strategii, kdy známe koncový stav, známe počáteční stav a snažíme se nalézt postup řešení, nebo známe koncový stav, postup řešení a snažíme se najít počáteční stav. Řešení úlohy je potom založeno na ‚otočení‘ nalezeného postupu.

Obvyklými příklady použití této strategie na druhém stupni jsou geometrické konstrukční úlohy, kdy na začátku procesu řešení předpokládáme, že řešení existuje a má hledané atributy. Jejich analýzou pak dojdeme k počátečním podmínkám úlohy a obrácením celého postupu pak získáme popis konstrukce. Příkladem druhého způsobu použití cesty zpět jsou ‚číselní hadi‘, se kterými se setkáváme na prvním stupni základních škol. Na střední škole je možné tento způsob řešení použít při dokazování.

Ilustrace

Zadání: Adam říká: „Nejprve jsem prohrál čtvrtinu svých skleněnek a pak ještě čtvrtinu toho, co mi zbylo, takže teď mám jen 18 skleněnek.“ Kolik skleněných kuliček měl Adam původně?

Řešení: Postupujme od konce. Adamovi zbylo na konci hry 18 skleněnek, což bylo $\frac{3}{4}$ skleněných kuliček, které měl před druhou prohrou. Do druhé hry Adam vstupoval se $\frac{4}{4}$ skleněnek, tedy s 24 kuličkami, což bylo $\frac{3}{4}$ kuliček, se kterými hrál první hru. První hru Adam začal se $\frac{4}{4}$ kuliček, tedy se 32 skleněnkami, což byl původní počet.

Odpověď: Adam měl 32 skleněných kuliček.

6.2.2.9 Konkretizace a zobecnění

Těmto dvěma strategiím by se ve školské matematice měla věnovat mimořádná pozornost, protože obě stojí v samotném centru toho, čemu se říká matematické myšlení. Velmi úzce spolu souvisejí, skoro by se dalo říci, že jsou to dvě strany téže mince.

Řešitel má zadánu úlohu a prozatím ji neumí vyřešit. Někdy se ukáže, že pomocí její konkretizace dostane úlohu, kterou vyřešit umí, a že pomocí tohoto řešení dokáže vyřešit i původní úlohu. Návrat k původní úloze pak představuje zobecnění (viz ilustrace).

Někdy naopak zadanou úlohu zobecní a dostane tak úlohu, kterou je schopen vyřešit. Pomocí konkretizace se pak následně vrátí k úloze původní.

Ilustrace

Zadání: Obchodník koupil knihu za jednu sedminu její původní ceny a prodal ji za tři osminy její původní ceny. Jaký zisk v procentech má obchodník?

Řešení: Proveďme konkretizaci úlohy a předpokládejme, že původní cena knihy byla např. 56 Kč. Obchodník tedy koupil knihu za 8 Kč a prodal ji za 21 Kč. Jeho zisk snadno spočítáme:

21 – 8 = 13 (Kč).

Zisk v procentech činí:

$\frac{13}{8} \cdot 100 = 162{,}5$ (%).

Na základě naší konkretizace jsme získali jeden výsledek. Několika dalšími volbami ceny knihy bychom mohli snadno ověřit, že na volbě původní ceny nezáleží. A provést tak zobecnění našeho výsledku.

Odpověď: Obchodníkův zisk byl 162,5 %.

6.2.2.10 Zavedení pomocného prvku

Při řešení matematických úloh se někdy ukazuje vhodné do tohoto řešení vložit pomocný prvek.

Takovým pomocným prvkem při řešení geometrických úloh může být např. bod nebo přímka (např. v ilustraci k Použití řešitelského obrázku byly doplněny úhlopříčky), někdy to však může být i složitější geometrický útvar. V algebře při řešení rovnic to obvykle bývá nová proměnná, kterou zavedeme (použití substituce).

6.2.2.11 Rozklad na jednodušší případy

Při této strategii řešitel rozloží zadanou úlohu na několik jednodušších úloh, které vyřeší. Řešení zadané úlohy dostane spojením řešení všech jednodušších úloh.

Tato strategie se ve školské matematice typicky používá při řešení rovnic nebo nerovnic s absolutními hodnotami.

6.2.2.12 Užití falešného předpokladu

Řešitel na začátku určí odhad výsledku, u kterého si je však vědom toho, že je pravděpodobně nesprávný (falešný). Provede ověření, v rámci kterého zjistí nejen, jestli jeho hodnota vyhovuje zadání úlohy (tak jak to probíhá i u strategií Pokus – Ověření – Korekce a Systematické experimentování), ale i to, jak moc se od hodnoty požadované liší. Přesněji řečeno, kolikrát je požadovaná hodnota jiná než hodnota, kterou získal při použití svého falešného předpokladu. Na základě tohoto zjištění provede úpravu předpokládaného výsledku. Podstatný je však charakter této korekce. Řešitel totiž neučiní, tak jako u strategie Pokus – Ověření – Korekce, další odhad, ale sofistikovaně již provede výpočet vedoucí k výsledku.

Na rozdíl od jiných druhů experimentování tato strategie není univerzální, ale je *specifická pro určité typy úloh*. Mezi tyto úlohy patří ty, u kterých se v zadání objevuje určitá hodnota, která má poměrový vztah k hledané hodnotě. Z matematického pohledu v pozadí těchto úloh stojí linearita vztahů. Určením koeficientu podobnosti získá řešitel údaj, jak změnit předpokládanou hodnotu výsledku (falešný předpoklad).

Ilustrace

Zadání: Třetina neznámého čísla zmenšená o 20 % je číslo 32. O jaké číslo se jedná?

Řešení: Úloha má požadovaný charakter (neznámé číslo je konkrétním násobkem zadaného čísla.

Předpokládejme, že hledaným číslem je např. 60. Proveďme s tímto číslem vše, co požaduje zadání:

$$\frac{1}{3} \,.\, 60 - 0{,}2 \,.\, \frac{1}{3} \,.\, 60 = 16.$$

Číslo 16 je dvakrát menší než číslo 32. Proto hledaným číslem je číslo dvakrát větší než 60, tj. 120.

Odpověď: Hledaným číslem je 120.

6.3 Ukázka hodiny

Nováková, Novotná, 2018

6.3.1 Úvodní informace

Cílová skupina: materiál je určen pro žáky 8. ročníku ZŠ, ev. pro žáky tercie osmiletého gymnázia, 13–14 let

Cíle materiálu: Hlavním cílem materiálu je seznámit čtenáře s různými heuristickými (nealgoritmickými) strategiemi řešení hlavně slovních úloh. Pozornost je zaměřena na důležitost a role situací, které podporují matematickou tvořivost žáků (nalézání vlastních řešitelských postupů v nestandardních situacích), a na možnosti, které má učitel, aby změnil přístup žáků k řešení úloh od řešení pomocí algoritmu, který jim byl předložen, směrem k vlastnímu tvořivému hledání vhodných, i když někdy neškolských řešitelských strategií. Zdůrazněna je důležitost a priori analýzy úlohy podle teorie didaktických situací v matematice.

Potřebný čas na aplikaci materiálu: I když uvedená ukázka proběhla v jedné vyučovací hodině, je možné ji realizovat i v několika částech v různých vyučovacích hodinách.

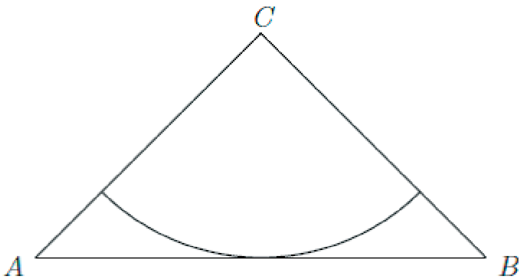
6.3.2 Použité úlohy

Zahrada

Po obvodu pozemku tvaru čtverce má být postaveno celkem 24 kůlů. Kolik nejvýše kůlů bude na každé straně tohoto pozemku, jestliže na všech jeho stranách má být počet kůlů stejný?

Čtvrtkruh

Do pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku je vepsána část kružnice následujícím způsobem (obr. 6.3):

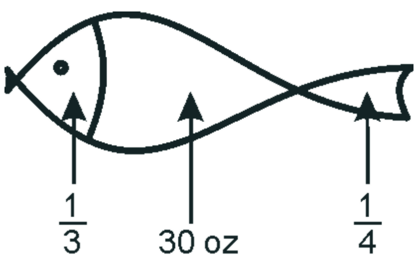


Obr. 6.3

Určete obsah vepsané části kruhu, jestliže velikost přepony trojúhelníka je $|AB| = 8$ cm.

Ryba

Hlava ryby váží $\frac{1}{3}$ celé ryby, její ocas váží $\frac{1}{4}$ celé ryby a její tělo váží 30 uncí (viz obr. 6.4). Kolik váží celá ryba?



Obr. 6.4

Pomůcky: psací a rýsovací potřeby, kalkulačka, pracovní listy s úlohami

Zezadu na tabuli napíše učitel výsledky všech použitých úloh. Žáci, kteří vyřeší všechny úlohy před ukončením řešení, si mohou své výsledky porovnat a případně se ještě podívat, kde udělali chybu.

6.3.3 Vyučovací hodina

6.3.3.1 První část (20–25 minut)

- Žáci pracují v heterogenních skupinách po 2 až 4 členech
- Každá skupina dostane tři pracovní listy, na každém je jedna úloha. Úkolem skupiny je všechny úlohy vyřešit, a pokud to půjde, najít více strategií řešení. Na řešení úloh by se měli podílet všichni členové, tak, aby náhodně zvolený člen byl schopen vysvětlit řešení libovolné úlohy
- Pokud bude mít některá skupina všechny zadané úlohy splněny v předstihu, mohou si zkontrolovat

Poznámka: Učitel do práce skupin nezasahuje

6.3.3.2 Druhá část (délka závisí na počtu řešitelských strategií, které skupiny navrhly; odhad: 10 minut)

- Po 25 minutách skončí práce ve skupinách a náhodně vybraní žáci z jednotlivých skupin budou prezentovat řešení svých skupin u tabule. Ostatní skupiny porovnají svá řešení s převáděním. Mohou diskutovat s předvádějícím žákem i mezi sebou o všem, co je v představovaném řešení zaujme.

Poznámka: Učitel je moderátorem diskuse. Současně hlídá, aby žáci nepřijali nějakou chybu jako správný krok nebo řešení. Když k tomu dojde, snaží se vést diskusi tak, aby žáci chybu pokud možno odhalili sami. K tomu snadno dojde v případě, že některá skupina má správný postup i výsledek. Když k tomu ale nedojde, musí učitel vhodným způsobem přesvědčit žáky o tom, že došlo k chybě.

Pokud skupiny odhalily očekávané strategie řešení úloh, aktivita končí. Pokud učitel zná ještě další vhodné řešitelské strategie, má možnost zařadit ještě další pokračování aktivity.

6.3.3.3 Třetí část (doporučená, není nutná; délka se odvíjí od konkrétní situace ve třídě)

- Žáci se vrátí do původních skupin a snaží se najít další vhodné řešitelské strategie

Jiná možnost: Učitel navrhne jednu nebo více vhodných strategii, které se ve druhé části neobjevily. Žáci se je ve skupinách snaží vyřešit

- Náhodně vybraní představitelé skupin nalezené postupy představí třídě. Postup je analogický jako ve druhé části

6.3.3.4 Čtvrtá část (pokud zbyde čas, navazuje na předchozí; pokud ne, lze se k úlohám vrátit v jiné hodině)

- Učitel shrne, které postupy řešení jsou pro dané úlohy vhodné a které ne (včetně důvodů, které to způsobují)

6.4 Zkušenosti z pilotování

- Aktivita byla pilotována v tercii osmiletého gymnázia. Přítomno bylo 24 žáků (10 chybělo)
- Žáci byli rozděleni do 7 skupin po 2 až 4 žácích (žáci si skupiny vytvořili sami, učitelka netrvala na rozdělení po 4)
- Všichni žáci se podíleli na řešení, spolupracovali a vysvětlovali si v rámci skupiny své myšlenky
- Během práce ve skupinách se objevily dotazy a připomínky k úloze Zahrada:
  - Je roh strana čtverce?
  - Musí být kůl v rohu?
  - To je jednoduché, bude jich 6.

  Připomínky k terminologii úlohy Ryba:
  - Ryba nemá ocas, ale ocasní ploutev.
  - Co je to unce?

- Shrnutí řešení jednotlivých úloh

Zahrada

Na první pohled se úloha zdála žákům snadná, všechny skupiny úlohu vyřešily správně, ale ne všichni na první pokus (viz ukázky řešení).

Nejčastěji se objevila strategie *Řešitelský obrázek* kombinovaná se strategií *Pokus – omyl* (umístím 6 kůlů, nevychází to, zkusím jinak…), dále pak strategie „dám kůly do rohů, odečtu od celkového počtu a zbytek vydělím 4“ (což už je vlastně téměř zobecnění).

Při hledání dalších způsobů řešení se objevil dotaz, zda musí být kůly nutně v rohu (žáci s učitelkou se shodli, že teoreticky nemusí, ale pak už by nebylo splněné zadání úlohy).

Při prezentování výsledků žáci z legrace navrhovali, že přikoupí výhodně další kůly, a tak sami přišli i na zobecnění úlohy pro *c* kůlů.

Čtvrtkruh

Žáci řešili pomocí Pythagorovy věty, zavedením pomocného prvku – čtverce nebo jeho části – a dále strategií, která se v naší a priori analýze neobjevila – jeden žák potřebné prvky změřil a pomocí poměru a znalosti skutečné délky *AB* změnil tak, aby získal skutečné rozměry. Obsah části kruhu pak vypočítal a výsledek se od správného lišil o 0,5 cm^2. Žáci diskutovali o tom, zda takové řešení přijmou. Žákům se nelíbilo, že je nepřesné, ale na druhou stranu oceňovali, že dotyčný žák „ví, co dělá“ – perfektně vysvětlil, že používal poměr, zdůvodnil proč.

Ryba

Všichni žáci úlohu řešili aritmetickou cestou.

Rovnice už znali, po prezentaci vlastního postupu je učitelka vyzvala k sestavení rovnice. Pro většinu z nich to nebyl problém. Společně diskutovali o výhodnosti řešení pomocí rovnice i bez ní. Žáci se shodli na tom, že bez rovnice se jim zdá řešení jednodušší.

6.5 Závěr

Závěry, které uvádíme, vycházejí z dlouhodobého pozorování žáků při řešení úloh, jestliže je jim umožněno používat heuristické strategie. Ukázalo se, že žáci začali být mnohem aktivnější v experimentování. Zvýšila se jejich schopnost komunikovat, obhajovat a vysvětlovat řešitelské postupy, které použili. Zlepšili se také v zaznamenávání svých řešitelských postupů a častěji ověřovali správnost získaných výsledků. Za nejdůležitější výsledek začleňování heuristických postupů do vyučování považujeme celkovou změnu v přístupu žáků k řešení úloh. Žáci se přestali obávat řešení úloh, nepřestali být aktivní, jakmile neviděli ihned vhodný řešitelský postup. Naučili se hledat řešení a nevzdávat se.

Příprava didaktických situací využívajících heuristické strategie je pro učitele náročná: představení úkolu, výběr a příprava úloh, hodnocení atd. Je také nutné vzít v úvahu vliv didaktického kontraktu. Významná je institucionalizace žákovských objevů. Je také mimořádně důležité, aby učitel předcházel situacím, kdy žáci začnou používat některou heuristickou strategii (obvykle tu, kterou se jim už podařilo úspěšně použít dříve) jako nový algoritmus bez přemýšlení, zda je pro danou situaci vhodná.

6.6 Literatura

Cihlář, J., Zelenka, M. *Matematika 8: Učebnice*. Praha: Prometheus, 1998.

Eisenmann, P., Novotná, J., Přibyl, J. Tvořivě při řešení úloh v matematice. In: Vondrová, N. (Ed.). *Dva dny s didaktikou matematiky 2015*. Praha: UK-PedF, 2015. str. 9-22.

Eisenmann, P., Novotná, J., Přibyl, J. Předpoklady žáka k řešení úloh a různé způsoby jejich řešení. In: Setkání učitelů matematiky ze všech typů a stupňů škol 2018. (v tisku).

Nováková, H. Analýza a priori jako součást přípravy učitele na výuku. *Scientia in educatione, 2013, 4*(2), s. 20-51. Dostupné z: https://dspace.cuni.cz/handle/20.500.11956/80200

Nováková, H., Novotná, J. Jak na to? Různé způsoby řešení slovních úloh. In: Vondrová, N. (Ed*.). Dva dny s didaktikou matematiky 2018*. Praha: UK-PedF, 2018. str. 98-105.

NOVOTNÁ, Jarmila. *Analýza řešení slovních úloh: [kapitoly z didaktiky matematiky]*. Praha: Univerzita Karlova – Pedagogická fakulta, 2000. ISBN 80-7290-011-0.

Pólya, G. *Mathematical Discovery: On Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving*. Combined Edition. New York, Chichester, Brisbane, Toronto: John Wiley & Sons, 1981.

Některé další dostupné publikace vydané v češtině nebo v angličtině zaměřené na probírané téma

Eisenmann, P., Přibyl, J. Systematické experimentování ve výuce matematiky. In: *Sborník příspěvků 6. konference Užití počítačů ve výuce matematiky*. České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2013. str. 85–93

Eisenmann, P., Přibyl, J. Analogie – užitečná heuristická strategie. *Učitel matematiky*, 24(3), 2016. str. 129-135.

Eisenmann, P., Přibyl, J., Novotná, J. The strategy the use of false assumption and word problem solving. *Journal on Efficiency and Responsibility in Education and Science*, 2019 12(2), p. 51–65. http://dx.doi.org/10.7160/eriesj.2019.120203

Pólya, G. (2016). *Jak to řešit? Překvapivé aspekty (nejen) matematických metod*. Praha: MatfyzPress, 2016. ISBN 978-80-7378-325-9

Přibyl, J., Ondrušová, J. Zavedení pomocného prvku – užitečná heuristická strategie. *Matematika, fyzika, informatika*, 2014, 23(2), str. 95–105.

Summary

Longitudinal observation of the pupils showed that pupils became more active in experimenting. An increase in their ability to communicate, to defend and explain their solving procedure, to react to opponent's remarks was detected. The pupils also got better at recording their solving procedures and became more sensitive to the need of verification (they checked correctness of their result). The most important outcome of incorporating heuristic strategies is the change in pupils' overall attitude to problem solving. The pupils stopped fearing problem solving, they did not put it off if they could not see a suitable solving procedure immediately. They learned to look for solutions and not give up.

The overall design of didactical situations in which heuristic strategies are used is demanding for the teacher: explaining the task, choice and preparation of problems, assessment, etc. It is necessary to be aware of the effects related to didactical contract. We would like to stress here the importance of institutionalization of the discoveries for pupils. It is also of utmost importance that a teacher be able to prevent a situation in which pupils appropriate some heuristic strategy (usually the strategy that they have used successfully in problem solving) as an algorithm and stop thinking about its suitability for the particular situation.

7 Lomené algebraické výrazy

Irena Budínová, Růžena Blažková, Kamila Hrčková

Abstrakt:
Předkládaný materiál slouží jako opora pro učitele při výuce algebraických výrazů v 9. ročníku základní školy. Hlavním cílem bylo vytvoření sérií úloh pro dané učivo ve třech úrovních podle náročnosti. Materiály jsou určeny pro procvičování učiva. Pro učitele jsou nachystány úlohy i s výsledky, které mají žákům sloužit jako samokontrola. Úlohy je možné zadávat žákům v podobě pracovního listu, v podobě kartiček, ale také je možné, že žáci pracují na tabletech.

Klíčová slova:
algebraické výrazy, diferencovaná výuka matematiky

Abstract:
The presented material serves as a support for teachers in teaching algebraic expressions in the 9th grade of primary school. The main goal was to create a series of tasks for the curriculum in three levels according to difficulty. The materials are intended for practicing the subject matter. Tasks are also prepared with results that are intended to serve as a self-check. It is possible to assign tasks to pupils in the form of worksheets, in the form of cards, but it is also possible that pupils work on tablets.

Key words:
algebraic expressions, differentiated teaching of mathematics

7.1 Úvod

Metodický materiál je určen pro diferencovanou výuku algebry v 9. ročníku základní školy. Materiál je sestaven z úloh s rostoucí náročností, a to ve třech úrovních. Úroveň 1 je základní, pro slabé žáky, úroveň 2 je střední, tu by měla zvládnout většina třídy, úroveň 3 je náročná, pro bystré a nadané žáky. Žáci si podle svých schopností vybírají příslušnou úroveň.

Učitel pracuje s celou třídou, žáci si samostatně volí úroveň a úlohy, které řeší, mají k dispozici samokontrolu.

Cílem materiálu je poskytnout učitelům 9. ročníku úlohy různé obtížnosti tak, aby každý žák byl schopen vyřešit některé úlohy podle svých schopností.

Materiál je rozdělen do sedmi vyučovacích hodin. Probíraná témata jsou následující:

1. Dosazování za proměnnou do lomeného výrazu, určování hodnoty výrazu
2. Určování podmínek lomeného výrazu

3. Rozšiřování lomeného výrazu výrazem
4. Krácení lomených výrazů
5. Sčítání a odčítání lomených výrazů
6. Násobení lomených výrazů
7. Dělení lomených výrazů

Materiály do svých hodin matematiky vytvořila paní učitelka Mgr. Kamila Hrčková. V hodině každý žák pracoval s tabletem, na kterém měl zadání. Po vyřešení úlohy se sám žák mohl opět prostřednictvím tabletu přesvědčit o tom, zda počítal správně. Aktivita byla hodnocena velice kladně žáky i učitelkou.

V případě, že nejsou k dispozici tablety, doporučujeme vytvořit úlohy v jednotlivých obtížnostech na barevné kartičky.

Cílová skupina: žáci 9. ročníku základní školy

Cíle materiálu: procvičení lomených výrazů (dosazování, určení hodnoty výrazu, podmínky, rozšiřování a krácení výrazu, operace s výrazy) prostřednictvím sady úloh různé obtížnosti

Potřebný čas na aplikaci materiálu: sedm vyučovacích hodin

7.2 Dosazování za proměnnou do lomeného výrazu, určení hodnoty výrazu

První, úvodní hodina, je zaměřena na dosazování čísel za proměnnou a určení hodnoty výrazu. Jedná se o prvotní seznámení žáků s lomenými výrazy, cílem je pochopení faktu, že za proměnnou ve výrazu je možné dosazovat konkrétní číselné hodnoty. Úlohy jsou voleny ve dvou úrovních (úroveň 1 a 2).

Didaktické komentáře
Pro žáky s problémy v matematice nebo žáky s SPU je problematické:

- dosazování záporného čísla,
- odčítání záporného čísla,
- dosazování čísla, pro něž výraz nemá smysl. Žák např. do výrazu $\frac{3-x}{2x}$ dosadí za x číslo 0, ve jmenovateli mu vyjde 2 a nepochopí, že výraz není definovaný. Tyto úlohy jsou v dalším textu voleny záměrně, aby se projevilo, zda má žák potíže tohoto typu.

Podle individuálních potřeb se tyto dovednosti procvičují pomocí jednoduchých úloh z dříve probíraného učiva (operace s celými čísly)

Úlohy
Úroveň 1
Urči hodnotu výrazu:

1. $\frac{3-x}{2x}$ pro x = 2, 3, 0, -1, -3

2. $\frac{x^2-9}{4-x}$ pro x = 3, 4, 0, -3, -4

3. $\frac{2a-4}{5-a}$ pro a = 1, 5, 0, -2, -5

Úroveň 2
Urči hodnotu lomeného výrazu pro x = -3, y = 2, z = -2:

4. $\frac{x-z}{x-y}$

5. $\frac{x+y+z}{(x-y)^2}$

6. $\frac{2x-3y}{-xy}$

7. $\frac{x-2z-y}{-z-y}$

Zdroj: http://2pir.eu/

Výsledky

1. $\frac{3-x}{2x}$ pro x = -3, -1, 0, 2, 3

   -1; -2; nelze; $\frac{1}{4}$; 0

2. $\frac{x^2-9}{4-x}$ pro x = -4, -3, 0, 3, 4

   $\frac{7}{8}$; 0; $-\frac{9}{4}$; 0; nelze

3. $\frac{2a-4}{5-a}$ pro a = -5, -2, 0, 1, 5

   $-\frac{7}{5}$; $-\frac{8}{7}$; $-\frac{4}{5}$; $-\frac{1}{2}$; nelze

4. $\frac{x-z}{x-y}$

   $\frac{1}{5}$

5. $\frac{x+y+z}{(x-y)^2}$

$-\frac{3}{25}$

6. $\frac{2x-3y}{-xy}$

-2

7. $\frac{x-2z-y}{-z-y}$

nelze

7.3 Určování podmínek lomeného výrazu

Při práci s lomenými výrazy si žáci musí uvědomit, že podstatné je určení podmínek výrazu neboli určení množin čísel, pro které má lomený výraz smysl.

Úlohy v jednotlivých kategoriích se od sebe liší složitostí výrazu ve jmenovateli zlomku. V jednotlivých úrovních je volen dostatek úloh. Žáci pravděpodobně v hodině všechny nestihnout vyřešit, mohou si je ale procvičovat samostatně v domácí přípravě.

Didaktické komentáře
Problémem mohou být příklady, ve kterých je ve jmenovateli druhá mocnina, nebo výraz typu 5–2r, druhá mocnina dvojčlenu, rozdíl čtverců.

Úlohy
Úroveň 1

1. $\frac{3}{s}$
2. $\frac{7m}{m+n}$
3. $\frac{c+3}{x^2}$
4. $\frac{r-3}{2r^2}$
5. $\frac{2u}{x+1}$
6. $\frac{4}{x-7}$
7. $\frac{2-u}{m-3}$
8. $\frac{3r}{5-2r}$
9. $\frac{x}{y}$
10. $\frac{r}{p+1}$
11. $\frac{8}{s+5}$
12. $\frac{s+13}{z-9}$

Úroveň 2

1. $\frac{3x}{x+4}$
2. $\frac{4y}{5y}$
3. $\frac{a}{a-3}$
4. $\frac{5+k}{k+6}$
5. $\frac{6b}{b+3}$
6. $\frac{x+8}{2x-3}$
7. $\frac{y-6}{2x-14}$
8. $2\frac{a+9}{a+2}$
9. $\frac{x-3}{3x+21}$
10. $\frac{u-8}{3u+18}$
11. $\frac{x+1}{3x+9}$
12. $\frac{x-1}{x+7}$

Úroveň 3

1. $\frac{7}{r^2-1}$
2. $\frac{r}{p^2-p}$
3. $\frac{x}{x^2-9}$
4. $\frac{c}{a^2-2ab}$
5. $\frac{2u-14}{u^2-2u}$
6. $\frac{k-3}{k^2-3k}$
7. $\frac{8+s}{9s^2-81}$
8. $\frac{t+4}{49-16t^2}$
9. $\frac{2x+3}{x(y-1)(x-y)}$
10. $\frac{2a+5}{10a^2b-5a}$
11. $\frac{4a^2-2b}{3a(a-3)(b-4)}$
12. $\frac{1}{x^2-4xy+4y^2}$

Zdroj: http://2pir.eu/

7.4 Rozšiřování lomeného výrazu daným výrazem

Ve třetí hodině se žáci učí, jak lomený výraz rozšiřovat daným výrazem. Úlohy v jednotlivých kategoriích se od sebe liší typem zadání a složitostí použitých lomených výrazů.

Didaktické komentáře
Se žáky s problémy opakujeme nejprve rozšiřování číselných zlomků, aby se pojem „rozšiřování“ řádně ukotvil, a teprve potom přejdeme na lomené algebraické výrazy.

Úlohy

Úroveň 1

Rozšiř lomený výraz výrazem v závorce. Nezapomeň na podmínky.

1. $\frac{5}{p}$ (3)
2. $\frac{4x}{3y}$ (x)
3. $\frac{-3n}{m}$ $(-7n)$
4. $\frac{2}{3s}$ $(-5s)$
5. $\frac{-2a}{5b}$ (a^2)
6. $\frac{7b}{-2c}$ $(4bc)$
7. $\frac{m}{m-1}$ $(\mathrm{m}+1)$
8. $\frac{n+3}{n}$ $(n+3)$
9. $\frac{u+1}{u-1}$ $(u-1)$
10. $\frac{3v}{4v-3}$ $(4v+3)$
11. $\frac{r-s}{r+s}$ $(-r-s)$
12. $\frac{-2p+q}{2p-q}$ $(-2p-q)$

Úroveň 2

Rozšiř na zadaného jmenovatele, nezapomeň na podmínky

1. $\frac{6}{7a} = \frac{\quad}{21a}$
2. $\frac{3}{5b} = \frac{\quad}{5ab}$
3. $\frac{5c-3}{cd} = \frac{\quad}{4c^2d}$
4. $\frac{2m-3n}{-4mn} = \frac{\quad}{12mn^2}$

5. $\frac{4u}{u-1} = \frac{}{u^2-u}$

6. $\frac{5p}{q} = \frac{}{q^2+q}$

7. $\frac{6}{7a} = \frac{}{21a}$

8. $\frac{3}{5b} = \frac{}{5ab}$

9. $\frac{5c-3}{cd} = \frac{}{4c^2d}$

10. $\frac{2m-3n}{-4mn} = \frac{}{12mn^2}$

11. $\frac{4u}{u-1} = \frac{}{u^2-u}$

12. $\frac{5p}{q} = \frac{}{q^2+q}$

Úroveň 3

1. $\frac{1}{2} = \frac{}{2a+6}$

2. $b - c = \frac{}{b+c}$

3. $\frac{3r}{r-s} = \frac{}{r^2-s^2}$

4. $\frac{-2m}{m-n} = \frac{}{n^2-m^2}$

5. $\frac{u+5}{u-5} = \frac{}{u^2-10u+25}$

6. $\frac{-3u}{3-u} = \frac{}{u^2-9}$

7. $\frac{-x-y}{x-y} = \frac{}{-x+y}$

8. $\frac{2}{7x} = \frac{}{21x}$

9. $\frac{3x}{4y} = \frac{}{-20xy}$

10. $\frac{-7x}{3y} = \frac{}{12xy^2}$

11. $\frac{x+5}{4x} = \frac{}{4x^2-8x}$

12. $\frac{-2x}{x-y} = \frac{}{-x-y}$

Zdroje

BUŠEK, Ivan. *Sbírka úloh z matematiky pro 8. ročník základní školy*. Praha: Prometheus, 1994. Učebnice pro základní školy. ISBN 8085849453.

BĚLOUN, František. *Sbírka úloh z matematiky pro základní školu*. 8. upr. vyd. Praha: Prometheus, 1998. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-7196-104-3.

Výsledky

1. $\frac{5}{p} = \frac{15}{3p}$ $\quad p \neq 0$

2. $\frac{4x}{3y} = \frac{4x^2}{3xy}$ $\quad x, y \neq 0$

3. $\frac{-3n}{m} = \frac{21n^2}{-7mn}$ $\quad m, n \neq 0$

4. $\frac{2}{3s} = \frac{-10s}{-15s^2}$ $\quad s \neq 0$

5. $\frac{-2a}{5b} = \frac{-2a^3}{5a^2b}$ $\quad a, b \neq 0$

6. $\frac{7b}{-2c} = \frac{28b^2c}{-8bc^2}$ $\quad b, c \neq 0$

7. $\frac{m}{m-1} = \frac{m^2+m}{m^2-1}$ $\quad m \neq \pm 1$

8. $\frac{n+3}{n} = \frac{(n+3)^2}{n^2+3n}$ $\quad n \neq 0;-3$

9. $\frac{u+1}{u-1} = \frac{u^2-1}{(u-1)^2}$ $\quad u \neq 1$

10. $\frac{3v}{4v-3} = \frac{12v^2+9v}{16v^2-9}$ $\quad u \neq \pm\frac{3}{4}$

11. $\frac{r-s}{r+s} = \frac{-(r^2-s^2)}{-(r+s)^2}$ $\quad r \neq -s$

12. $\frac{-2p+q}{2p-q} = \frac{-(q^2-4p^2)}{-(4p^2-q^2)}$ $q \neq \pm 2p$

1. $\frac{6}{7a} = \frac{18}{21a}$ $a \neq 0$
2. $\frac{3}{5b} = \frac{3a}{5ab}$ $a, b \neq 0$
3. $\frac{5c-3}{cd} = \frac{20c^2-12c}{4c^2d}$ $c, d \neq 0$
4. $\frac{2m-3n}{-4mn} = \frac{-6mn+9n^2}{12mn^2}$ $m, n \neq 0$
5. $\frac{4u}{u-1} = \frac{4u^2}{u^2-u}$ $u \neq 0;1$
6. $\frac{5p}{q} = \frac{5pq+5p}{q^2+q}$ $q \neq 0; -1$
7. $\frac{2}{13a} = \frac{6}{39a}$ $a \neq 0$
8. $\frac{4}{7b} = \frac{8a}{14ab}$ $a, b \neq 0$
9. $\frac{2a-9}{3a} = \frac{4a^2b-18ab}{6a^2b}$ $a, b \neq 0$
10. $\frac{4a}{a+1} = \frac{4a^2}{a^2+a}$ $a \neq 0; -1$
11. $\frac{2u-5}{u-2} = \frac{-2u+5}{2-u}$ $u \neq 2$
12. $\frac{u-2}{u+2} = \frac{(u-2)^2}{u^2-4}$ $u \neq \pm 2$

1. $\frac{1}{2} = \frac{a+3}{2a+6}$ $a \neq -3$
2. $\mathrm{b} - \mathrm{c} = \frac{b^2-c^2}{b+c}$ $b \neq -c$
3. $\frac{3r}{r-s} = \frac{3r^2+3rs}{r^2-s^2}$ $r \neq \pm s$

4. $\frac{-2m}{m-n} = \frac{2mn+2m^2}{n^2-m^2}$ $m \neq \pm n$

5. $\frac{u+5}{u-5} = \frac{u^2-25}{u^2-10u+25}$ $u \neq 5$

6. $\frac{-3u}{3-u} = \frac{3u^2+9u}{u^2-9}$ $u \neq \pm 3$

7. $\frac{-x-y}{x-y} = \frac{x+y}{-x+y}$ $x \neq y$

8. $\frac{2}{7x} = \frac{6}{21x}$ $x \neq 0$

9. $\frac{3x}{4y} = \frac{-15x^2}{-20xy}$ $x, y \neq 0$

10. $\frac{-7x}{3y} = \frac{-28x^2y}{12xy^2}$ $x, y \neq 0$

11. $\frac{x+5}{4x} = \frac{x^2+3x-10}{4x^2-8x}$ $x \neq 0; 2$

12. $\frac{-2x}{x-y} = \frac{2x}{-x+y}$ $x \neq y$

7.5 Krácení lomených výrazů

Čtvrtá hodina se zabývá krácením lomených výrazů. Opět je uveden dostatečný počet úloh a nelze předpokládat, že žáci vše stihnou přímo v hodině. Mají tedy dostatečný materiál pro domácí přípravu.

Úlohy v jednotlivých úrovních se liší obtížností lomeného výrazu, výrazy obsaženými ve jmenovateli a čitateli lomeného výrazu. U úrovně 1 je výraz určený ke krácení patrný na první pohled, v úrovni 3 musí žák používat algebraické vzorce, aby výrazy upravil.

Didaktické komentáře
Slabším žákům nejprve připomeneme krácení zlomků s čísly, teprve potom přecházíme na krácení algebraických výrazů.

Úlohy
Úroveň 1
Zkrať lomený výraz do základního tvaru a urči, kdy má smysl.

1. $\frac{15x^2}{25x} =$

2. $\frac{4x^2y^2}{6xy^2} =$

3. $\frac{6a(a+2)}{4a^2(a+2)} =$

4. $\frac{15x^2(x+4)}{20x(4+x)} =$

5. $\frac{15k^4m^2}{18k^4m^3} =$

6. $\frac{15y^2z(y-z)}{10yz^2(y-z)} =$

7. $\frac{17u^2v^3}{51u^2v^4} =$

8. $\frac{-12k^2(2k+3)}{24k(2k+3)} =$

9. $\frac{9x^3y^3}{(3xy)^2} =$

10. $\frac{9m^3n^3}{(-3m)^3n} =$

11. $\frac{u(x-1)}{v(x-1)} =$

12. $\frac{ab(2c-1)}{2abc} =$

Úroveň 2

Uprav lomený výraz, zkrať do základního tvaru a urči, kdy má smysl.

1. $\frac{x-2}{5x-10} =$

2. $\frac{3a+3b}{7a+7b} =$

3. $\frac{5m+10n}{3m+6n} =$

4. $\frac{2x-2y}{x^2-xy} =$

5. $\frac{3p-3q}{(p-q)^2} =$

6. $\frac{a^2+2a+1}{2a+2} =$

7. $\frac{2(a+5)^2}{2a^2-50} =$

8. $\frac{3r^2-3r^3}{r-r^2} =$

9. $\frac{2u+2v}{2u^2-2v^2} =$

10. $\frac{9z^2-27vz}{z^2-3vz} =$

11. $\frac{4x^2-8xy+4y^2}{2x^2-2y^2} =$

12. $\frac{s^2-16}{(s+4)(s-4)} =$

Úroveň 3

Uprav lomený výraz, zkrať do základního tvaru a urči, kdy má smysl.

1. $\frac{16x^2}{12x^3} =$

2. $\frac{4(n+5)}{2(n+5)} =$

3. $\frac{z-2}{2-z} =$

4. $\frac{-20xy}{15x^2y} =$

5. $\frac{xy+y}{y} =$

6. $\frac{4g^2-12gh+9h^2}{3h-2g} =$

7. $\frac{(3x)^2}{15x^2} =$

8. $\frac{w^2+6w}{3w+18} =$

9. $\frac{64x^2-4}{6-24x} =$

10. $\frac{(4a^2b)^2}{(-2ab)^3} =$

11. $\frac{cd-2d^2}{2c-4d} =$

12. $\frac{-8a-2b}{48a^2+24ab+3b^2} =$

Zdroje

DYTRYCH, Martin, Irena DOBIASOVÁ a Libuše LIVŇANSKÁ. *Sbírka úloh z matematiky pro nižší ročníky víceletých gymnázií a pro 2. stupeň základních škol*. 2. vyd. Praha: Fortuna, 2001. Početní úlohy. ISBN 80-7168-766-9.

PŮLPÁN, Zdeněk, Michal ČIHÁK, Josef TREJBAL, Jitka BOUŠKOVÁ a Milena BRZOŇOVÁ. *Matematika 9 pro základní školy*. Praha: SPN – pedagogické nakladatelství, 2010. ISBN 978-80-7235-488-7.

Výsledky

1. $\frac{15x^2}{25x} = \frac{3x}{5}$ $\quad x \neq 0$

2. $\frac{4x^2y^2}{6xy^2} = \frac{2x}{3}$ $\quad x, y \neq 0$

3. $\frac{6a(a+2)}{4a^2(a+2)} = \frac{3}{2a}$ $\quad a \neq 0; a \neq -2$

4. $\frac{15x^2(x+4)}{20x(4+x)} = \frac{3x}{4}$ $\quad x \neq 0; x \neq -4$

5. $\frac{15k^4m^2}{18k^4m^3} = \frac{5}{6m}$ $\quad k, m \neq 0$

6. $\frac{15y^2z(y-z)}{10yz^2(y-z)} = \frac{3y}{2z}$ $\quad y, z \neq 0; y \neq z$

7. $\frac{17u^2v^3}{51u^2v^4} = \frac{1}{3v}$ $\quad u, v \neq 0$

8. $\frac{-12k^2(2k+3)}{24k(2k+3)} = \frac{-k}{2}$ $\quad k \neq 0;\ k \neq -\frac{3}{2}$

9. $\frac{9x^3y^3}{(3xy)^2} = xy$ $\quad x, y \neq 0$

10. $\frac{9m^3n^3}{(-3m)^3n} = \frac{n^2}{-3}$ $\quad m, n \neq 0$

11. $\frac{u(x-1)}{v(x-1)} = \frac{u}{v}$ $\quad v \neq 0; x \neq 1$

12. $\frac{ab(2c-1)}{2abc} = \frac{2c-1}{2c}$ $\quad a, b, c \neq 0$

1. $\frac{x-2}{5x-10}=\frac{1}{5}$ $\qquad x\neq 2$

2. $\frac{3a+3b}{7a+7b}=\frac{3}{7}$ $\qquad a\neq -b$

3. $\frac{5m+10n}{3m+6n}=\frac{5}{3}$ $\qquad m\neq -n$

4. $\frac{2x-2y}{x^2-xy}=\frac{2}{x}$ $\qquad x\neq 0; y$

5. $\frac{3p-3q}{(p-q)^2}=\frac{3}{p-q}$ $\qquad p\neq q$

6. $\frac{a^2+2a+1}{2a+2}=\frac{a+1}{2}$ $\qquad a\neq -1$

7. $\frac{2(a+5)^2}{2a^2-50}=\frac{a+5}{a-5}$ $\qquad a\neq \pm 5$

8. $\frac{3r^2-3r^3}{r-r^2}=3r$ $\qquad r\neq 0; 1$

9. $\frac{2u+2v}{2u^2-2v^2}=\frac{1}{u-v}$ $\qquad u\neq \pm v$

10. $\frac{9z^2-27vz}{z^2-3vz}=9$ $\qquad z\neq 0; 3v$

11. $\frac{4x^2-8xy+4y^2}{2x^2-2y^2}=\frac{x-y}{x+y}$ $\qquad x\neq \pm y$

12. $\frac{s^2-16}{(s+4)(s-4)}=1$ $\qquad s\neq \pm 4$

1. $\frac{16x^2}{12x^3}=\frac{4}{3x}$ $\qquad x\neq 0$

2. $\frac{4(n+5)}{2(n+5)}=2$ $\qquad n\neq -5$

3. $\frac{z-2}{2-z}=-1$ $\qquad z\neq 2$

4. $\frac{-20xy}{15x^2y}=-\frac{4}{3x}$ $\qquad x, y\neq 0$

5. $\frac{xy+y}{y}=x+1$ $\qquad y\neq 0$

6. $\frac{4g^2-12gh+9h^2}{3h-2g}=3h-2g$ $\qquad h\neq \frac{2g}{3}$

7. $\frac{(3x)^2}{15x^2} = \frac{3}{5}$ $\qquad x \neq 0$

8. $\frac{w^2+6w}{3w+18} = \frac{w}{3}$ $\qquad w \neq -6$

9. $\frac{64x^2-4}{6-24x} = -2(4x+1)$ $\qquad x \neq \frac{1}{4}$

10. $\frac{(4a^2b)^2}{(-2ab)^3} = -\frac{2a}{b}$ $\qquad a, b \neq 0$

11. $\frac{cd-2d^2}{2c-4d} = \frac{d}{2}$ $\qquad c \neq 2d$

12. $\frac{-8a-2b}{48a^2+24ab+3b^2} = -\frac{2}{3(4a+b)}$ $\qquad b \neq -4a$

7.6 Sčítání a odčítání lomených výrazů

Předcházející aktivity byly podstatné pro to, aby žáci byli schopni sečíst či odečíst dva (či více) lomené výrazy. V další hodině se již můžeme věnovat problematice sčítání a odčítání lomených výrazů.

Didaktické komentáře
Opakujeme sčítání a odčítání zlomků, pojem společný jmenovatel, možnost krácení v rámci jednoho zlomku. Častou chybou je krácení při sčítání do kříže, na tuto chybu bereme zvýšenou zřetel.

Úlohy
Úroveň 1

1. $\frac{x}{2y} + \frac{2x}{3y} - \frac{3x}{4y} =$

2. $\frac{1}{y^2} - \frac{2x}{y^3} + \frac{x^2}{y^4} =$

3. $\frac{x}{2y} + \frac{y}{2x} - \frac{1}{xy} =$

4. $\frac{u+v}{2v} + \frac{u-v}{v} =$

5. $\frac{x+1}{xz} - \frac{y-1}{yz} =$

6. $\frac{5x^2-3x+1}{x^2y} - \frac{4x-1}{xy} =$

7. $\frac{5}{3(x+y)}+\frac{2}{x+y}=$

8. $\frac{3m}{m-1}-\frac{3m}{2(m-1)}=$

9. $\frac{9a}{4(a+2)}-\frac{1}{a+2}=$

10. $\frac{x}{1-y}+\frac{y^2}{x(1-y)}=$

11. $\frac{5a}{2(a+b)}-\frac{7a}{3(b+a)}=$

12. $\frac{4r+1}{5(p-3)}-\frac{r}{2(p-3)}=$

Úroveň 2
Zjednoduš a urči podmínky lomeného výrazu

1. $\frac{5}{a}-\frac{3}{a+b}=$

2. $\frac{2}{m-n}+\frac{1}{n}=$

3. $\frac{1}{p}+\frac{4}{p-q}=$

4. $\frac{r}{r+2}-\frac{3}{r}=$

5. $\frac{2x}{x-5}+\frac{x}{3}=$

6. $\frac{y}{2(y-1)}+\frac{1}{4}=$

Úroveň 3
Zjednoduš a urči podmínky lomeného výrazu

1. $\frac{5}{2a-2}-\frac{2}{a-1}=$

2. $\frac{x}{x+y}+\frac{y}{3x+3y}=$

3. $\frac{r+s}{r^2+rs}-\frac{1}{r}=$

4. $\frac{3}{a}-\frac{3a}{a^2-a}=$

5. $\frac{2b}{ab-ac}+\frac{3}{b-c}=$

6. $\frac{a}{x^2-2}-\frac{bx}{x^3-2x}=$

Zdroje

BUŠEK, Ivan, Marie KUBÍNOVÁ a Jarmila NOVOTNÁ. *Sbírka úloh z matematiky pro 9. ročník základní školy*. Praha: Prometheus, 1995. ISBN 8071961329.

http://2pir.eu/

Výsledky

1. $\frac{x}{2y}+\frac{2x}{3y}-\frac{3x}{4y}=\frac{5x}{12y}$ $\qquad y \neq 0$

2. $\frac{1}{y^2}-\frac{2x}{y^3}+\frac{x^2}{y^4}=\frac{(y-x)^2}{y^4}$ $\qquad y \neq 0$

3. $\frac{x}{2y}+\frac{y}{2x}-\frac{1}{xy}=\frac{x^2+y^2-2}{2xy}$ $\qquad x, y \neq 0$

4. $\frac{u+v}{2v}+\frac{u-v}{v}=\frac{3u-v}{2v}$ $\qquad v \neq 0$

5. $\frac{x+1}{xz}-\frac{y-1}{yz}=\frac{x+y}{xyz}$ $\qquad x, y, z \neq 0$

6. $\frac{5x^2-3x+1}{x^2y}-\frac{4x-1}{xy}=\frac{(x-1)^2}{x^2y}$ $\qquad x, y \neq 0$

7. $\frac{5}{3(x+y)}+\frac{2}{x+y}=\frac{11}{3(x+y)}$ $\qquad x \neq -y$

8. $\frac{3m}{m-1}-\frac{3m}{2(m-1)}=\frac{3m}{2(m-1)}$ $\qquad m \neq 1$

9. $\frac{9a}{4(a+2)}-\frac{1}{a+2}=\frac{9a-4}{4(a+2)}$ $\qquad a \neq -2$

10. $\frac{x}{1-y}+\frac{y^2}{x(1-y)}=\frac{x^2+y^2}{x(1-y)}$ $\qquad x \neq 0; y \neq 1$

11. $\frac{5a}{2(a+b)}-\frac{7a}{3(b+a)}=\frac{a}{6(a+b)}$ $\qquad a \neq -b$

12. $\frac{4r+1}{5(p-3)}-\frac{r}{2(p-3)}=\frac{3r+2}{10(p-3)}$ $\qquad p \neq 3$

1. $\frac{5}{a} - \frac{3}{a+b} = \frac{2a+5b}{a(a+b)}$ $\qquad a \neq 0; -b$

2. $\frac{2}{m-n} + \frac{1}{n} = \frac{m+n}{n(m-n)}$ $\qquad n \neq 0; m$

3. $\frac{1}{p} + \frac{4}{p-q} = \frac{5p-q}{p(p-q)}$ $\qquad p \neq 0; q$

4. $\frac{r}{r+2} - \frac{3}{r} = \frac{r^2-3r-6}{r(r+2)}$ $\qquad r \neq 0; -2$

5. $\frac{2x}{x-5} + \frac{x}{3} = \frac{x^2+x}{3(x-5)}$ $\qquad x \neq 5$

6. $\frac{y}{2(y-1)} + \frac{1}{4} = \frac{3y-1}{4(y-1)}$ $\qquad y \neq 1$

7.7 Násobení lomených výrazů

U násobení lomených výrazů by žáci měli myslet na to, že je vhodné výraz zjednodušit krácením předtím, než se začne násobit, pokud je to možné. Dále je nutné určit podmínky pro všechny lomené výrazy, které se v průběhu úprav vyskytnou.

Úlohy
Úroveň 1
Zjednoduš, vynásob lomené výrazy a urči podmínky:

1. $\frac{a^3}{b^2} \cdot \frac{b^3}{a} =$

2. $\frac{-3abc}{c} \cdot \frac{6a^2}{ab} =$

3. $\frac{a^2b^2c}{2ab} \cdot \frac{6a^3b^2}{c^2} =$

4. $\frac{2a}{6ab} \cdot 3a =$

5. $4\mathrm{xz} \cdot \frac{y^2}{8x^2z^2} =$

6. $\frac{4a}{c^2} \cdot \frac{bc}{2a^2} \cdot \frac{8ab}{ac} =$

Úroveň 2

Zjednoduš, vynásob lomené výrazy a urči podmínky:

1. $\frac{ab+b^2}{9} \cdot \frac{6a}{b^2} =$
2. $\frac{ac-ad}{a-b} \cdot \frac{ac-bc}{c-d} =$
3. $\frac{x^2-1}{3x^2+3x} \cdot \frac{6x}{2x-2} =$
4. $\frac{a^2+2ab+b^2}{b+c} \cdot \frac{ab+ac}{a+b} =$
5. $\frac{xy^2-3xy}{xy^2-y^2} \cdot \frac{xy-y}{xy-3x} =$
6. $\frac{a^2-4}{a+1} \cdot \frac{a^2-1}{a-2} =$

Úroveň 3

Uprav, vynásob lomené výrazy a urči podmínky:

1. $\frac{2x^2-8x}{x-4} \cdot \frac{2}{x^2} =$
2. $\frac{3c^2-6c}{c^2d+cd^2} \cdot \frac{cd+d^2}{3c-6} =$
3. $\frac{c^2-cd}{cd+d^2} \cdot \frac{c^2+cd}{cd-d^2} =$
4. $\frac{a^2-ab}{a^2+ab} \cdot \frac{a^2b+ab^2}{ab} =$
5. $\frac{a^2-ab}{b} \cdot \frac{ab+b^2}{a} =$
6. $\frac{a-ab}{c-ac} \cdot \frac{ac-c}{ab-a} =$

Zdroje

BUŠEK, Ivan, Marie KUBÍNOVÁ a Jarmila NOVOTNÁ. *Sbírka úloh z matematiky pro 9. ročník základní školy*. Praha: Prometheus, 1995. ISBN 8071961329.

Výsledky

1. $\frac{a^3}{b^2} \cdot \frac{b^3}{a} = a^2 b$ $\qquad a, b \neq 0$

2. $\frac{-3abc}{c} \cdot \frac{6a^2}{ab} = -18a^2$ $\qquad a, b, c \neq 0$

3. $\frac{a^2b^2c}{2ab} \cdot \frac{6a^3b^2}{c^2} = \frac{3a^4b^3}{c}$ $\qquad a, b, c \neq 0$

4. $\frac{2a}{6ab} \cdot 3a = 1$ $\qquad a, b \neq 0$

5. $4xz \cdot \frac{y^2}{8x^2z^2} = \frac{y^2}{2xz}$ $\qquad x, z \neq 0$

6. $\frac{4a}{c^2} \cdot \frac{bc}{2a^2} \cdot \frac{8ab}{ac} = \frac{16b^2}{ac^2}$ $\qquad a, c \neq 0$

1. $\frac{ab+b^2}{9} \cdot \frac{6a}{b^2} = \frac{2a(a+b)}{3b}$ $\qquad b \neq 0$

2. $\frac{ac-ad}{a-b} \cdot \frac{ac-bc}{c-d} = ac$ $\qquad a \neq b; c \neq d$

3. $\frac{x^2-1}{3x^2+3x} \cdot \frac{6x}{2x-2} = 1$ $\qquad x \neq 0; x \neq \pm 1$

4. $\frac{a^2+2ab+b^2}{b+c} \cdot \frac{ab+ac}{a+b} = a(a+b)$ $\qquad a \neq -b; b \neq -c$

5. $\frac{xy^2-3xy}{xy^2-y^2} \cdot \frac{xy-y}{xy-3x} = 1$ $\qquad x \neq 0; 1; y \neq 0; 3$

6. $\frac{a^2-4}{a+1} \cdot \frac{a^2-1}{a-2} = (a+2)(a-1)$ $\qquad a \neq -1; 2$

1. $\frac{2x^2-8x}{x-4} \cdot \frac{2}{x^2} = \frac{4}{x}$ $\qquad x \neq 0; 4$

2. $\frac{3c^2-6c}{c^2d+cd^2} \cdot \frac{cd+d^2}{3c-6} = 1$ $\qquad c \neq 0; 2; -d; d \neq 0$

3. $\frac{c^2-cd}{cd+d^2} \cdot \frac{c^2+cd}{cd-d^2} = \frac{c^2}{d^2}$ $\qquad c \neq \pm d; d \neq 0$

4. $\frac{a^2-ab}{a^2+ab} \cdot \frac{a^2b+ab^2}{ab} = a - b \qquad a \neq 0; -b; b \neq 0$

5. $\frac{a^2-ab}{b} \cdot \frac{ab+b^2}{a} = a^2 - b^2 \qquad a, b \neq 0$

6. $\frac{a-ab}{c-ac} \cdot \frac{ac-c}{ab-a} = 1 \qquad a \neq 0; 1; b \neq 1; c \neq 0$

7.8 Dělení lomených výrazů

Na závěr učiva o lomených výrazech uvádíme dělení lomených výrazů. Jedná se o nejnáročnější operaci s lomenými výrazy, u níž obvykle žáci musí zužitkovat všechny předešlé dovednosti.

Didaktické komentáře
Častou chybou, které se žáci dopouštějí, je krácení do kříže předtím, než je dělení upraveno na násobení. Slabým žákům proto nejdříve zadáváme úlohy, kde tato chybná úprava není možná a žáci na ni tedy nemusí myslet. Postupně je vhodné zadávat úlohy, kde se může tato chybná úprava projevit.

Úlohy
Úroveň 1
Vyděl lomené výrazy a urči podmínky řešitelnosti:

1. $\frac{28a^2}{9b} : \left(\frac{2a}{3b}\right)^2 =$

2. $\frac{15a}{8b^2} : \left(-\frac{3a}{4b}\right)^2 =$

3. $\frac{9a^3}{8b^2} : \left(-\frac{3a}{4b}\right)^3 =$

4. $\left(-\frac{4a}{3b}\right)^2 : \left(-\frac{2a}{3b}\right)^3 =$

Úroveň 2
Vyděl lomené výrazy a urči podmínky řešitelnosti:

1. $\frac{p^2-1}{p-1} : \frac{p+1}{2p} =$

2. $\frac{2+p}{p^2-4} : \frac{3p}{p-2} =$

3. $\frac{-4p}{p+6} : \frac{6-p}{p^2-36} =$

4. $\frac{(p+1)^2}{p^2-1} : \frac{p+1}{p-1} =$

Úroveň 3
Vyděl lomené výrazy a urči podmínky řešitelnosti:

1. $\frac{v+u}{u^2-v^2} : \frac{2u}{(u-v)^2} =$

2. $\frac{u^2-v^2}{v-u} : \frac{v+u}{2uv} =$

3. $\frac{u^2+uv}{u^2} : \frac{u^2-v^2}{u-v} =$

4. $\frac{uv+v^2}{-u^2+uv} : \frac{u^2+uv}{(u-v)^2} =$

Zdroje

BUŠEK, Ivan, Marie KUBÍNOVÁ a Jarmila NOVOTNÁ. *Sbírka úloh z matematiky pro 9. ročník základní školy*. Praha: Prometheus, 1995. ISBN 8071961329.

Výsledky

1. $\frac{28a^2}{9b} : \left(\frac{2a}{3b}\right)^2 = 7b$ $\quad a, b \neq 0$

2. $\frac{15a}{8b^2} : \left(-\frac{3a}{4b}\right)^2 = \frac{10}{3a}$ $\quad a, b \neq 0$

3. $\frac{9a^3}{8b^2} : \left(-\frac{3a}{4b}\right)^3 = -\frac{8b}{3}$ $\quad a, b \neq 0$

4. $\left(-\frac{4a}{3b}\right)^2 : \left(-\frac{2a}{3b}\right)^3 = -\frac{6b}{a}$ $\quad a, b \neq 0$

1. $\frac{p^2-1}{p-1} : \frac{p+1}{2p} = 2p$ $\quad p \neq 0; \pm 1$

2. $\frac{2+p}{p^2-4} : \frac{3p}{p-2} = \frac{1}{3p}$ $\quad p \neq 0; \pm 2$

3. $\frac{-4p}{p+6} : \frac{6-p}{p^2-36} = 4p$ $\qquad p \neq \pm 6$

4. $\frac{(p+1)^2}{p^2-1} : \frac{p+1}{p-1} = 1$ $\qquad p \neq \pm 1$

1. $\frac{v+u}{u^2-v^2} : \frac{2u}{(u-v)^2} = \frac{u-v}{2u}$ $\qquad u \neq 0; \pm v$

2. $\frac{u^2-v^2}{v-u} : \frac{v+u}{2uv} = -2uv$ $\qquad u \neq 0; \pm v; v \neq 0$

3. $\frac{u^2+uv}{u^2} : \frac{u^2-v^2}{u-v} = \frac{1}{u}$ $\qquad u \neq 0; \pm v$

4. $\frac{uv+v^2}{-u^2+uv} : \frac{u^2+uv}{(u-v)^2} = -\frac{v(u-v)}{u^2}$ $\qquad u \neq 0; \pm v$

7.9 Závěr

Využívání úloh pro procvičování úprav algebraických výrazů se ve výuce velmi osvědčilo. Žáci pracovali na tabletech, měli k dispozici samokontrolu. Každý žák pracoval samostatně, učitelka byla vyhledávána a žádána o pomoc jen ve výjimečných případech. To podstatně zefektivnilo výuku, neboť učitelka dostala možnost věnovat se těm žákům, kteří to nejvíce potřebovali.

Možnosti samokontroly žáci nezneužívali. Naopak, pochopili, že se učí a procvičují kvůli sobě, nemá tedy smysl hledat dopředu výsledek.

Žáci i učitelka hodnotili aktivity v hodinách matematiky velmi pozitivně. Žáci byli potěšeni tím, že mohou pracovat podle svých možností, na své úrovni. Slabí žáci tak měli možnost ve škole dosáhnout úspěchu při řešení jednodušších úloh. Šikovní žáci nemuseli čekat na to, až učitelka vysvětlí učivo slabým žákům. Pracovali na náročnějších úlohách, mohli jich vyřešit vyšší počet.

7.10 Literatura

BĚLOUN, František. *Sbírka úloh z matematiky: pro základní školu*. 8. upr. vyd. Praha: Prometheus, 1998. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-7196-104-3.

BLAŽKOVÁ, Růžena. *Didaktika matematiky se zaměřením na specifické poruchy učení*. Brno: Masarykova univerzita, 2017. Matematika a didaktika matematiky. ISBN 978-80-210-8673-9. Dostupné z: http://krameriusndk.nkp.cz/search/handle/uuid:0ff66680-ed90-11e8-bc37-

Bušek, I. *Sbírka úloh z matematiky: 8. ročník základní školy*. Praha: Prometheus, 1994. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-85849-45-3.

Bušek, I., Kubínová, M., Novotná, J. *Sbírka úloh z matematiky pro 9. ročník základní školy.* Praha: Prometheus, 1995. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-7196-132-9.

DYTRYCH, Martin, Irena DOBIASOVÁ a Libuše LIVŇANSKÁ. *Sbírka úloh z matematiky pro nižší ročníky víceletých gymnázií a pro 2. stupeň základních škol*. 2. vyd. Praha: Fortuna, 2001. Početní úlohy. ISBN 80-7168-766-9.

PŮLPÁN, Zdeněk, Michal ČIHÁK, Josef TREJBAL, Jitka BOUŠKOVÁ a Milena BRZOŇOVÁ. *Matematika 9 pro základní školy*. Praha: SPN - pedagogické nakladatelství, 2010. ISBN 978-80-7235-488-7.

http://2pir.eu/

Summary

The use of tasks for practicing algebraic expressions has proved very useful in teaching. Pupils worked on tablets, had a self-check. Each pupil worked alone, the teacher was sought out and asked for help only in exceptional cases. This greatly streamlined teaching, as the teacher was given the opportunity to pursue those pupils most in need.

Pupils did not abuse the possibilities of self-control. On the contrary, they understand that they are learning and practicing for themselves, so it makes no sense to look ahead to the result.

Pupils and teachers rated the activities in mathematics lessons very positively. Pupils were pleased to be able to work at their own level. Thus, weak pupils had the opportunity to succeed at school in solving simpler tasks. Skilled pupils did not have to wait for the teacher to explain the subject matter to the weak pupils. They worked on more demanding tasks, and they could solve a higher number of tasks.

Závěr

Jednotlivé kapitoly této brožury nabízejí možné přístupy k výuce uvedených témat s cílem podpořit rozvíjení matematické gramotnosti žáků. Navržené aktivity i úlohy zde uvedené byly prověřeny ve výuce ve školách.

Společným rysem vytvořených metodických materiálů je důraz na aktivní zapojení žáků a odhalování matematických vztahů na základě jejich vlastního řešení úloh. Cílem navržených aktivit je přispět k prevenci vzniku formálních poznatků u žáků a podpořit tak jejich porozumění učivu. K tomu rovněž přispívá propojování různých matematických témat, jako jsou aritmetika a algebra, geometrie a algebra aj.

Vytvořené metodické materiály tak mohou poskytnout učitelům matematiky inspiraci, jak mohou podpořit rozvoj matematického myšlení žáků.

Summary

The chapters of this brochure offer possible approaches to teaching some topics in order to support the development of pupils' mathematical literacy. The proposed activities and tasks have been tested in school practice.

The emphasis on pupils' activity and discovering mathematics relations based on their own solutions of the tasks and problems is the common feature of created methodological materials. The aim of the proposed procedures is to contribute to the prevention of pupils' formal knowledge and thus, to support their subject matter understanding. The interconnections of various mathematics topics such as arithmetic and algebra, geometry and algebra, etc., contribute to reaching the above goal.

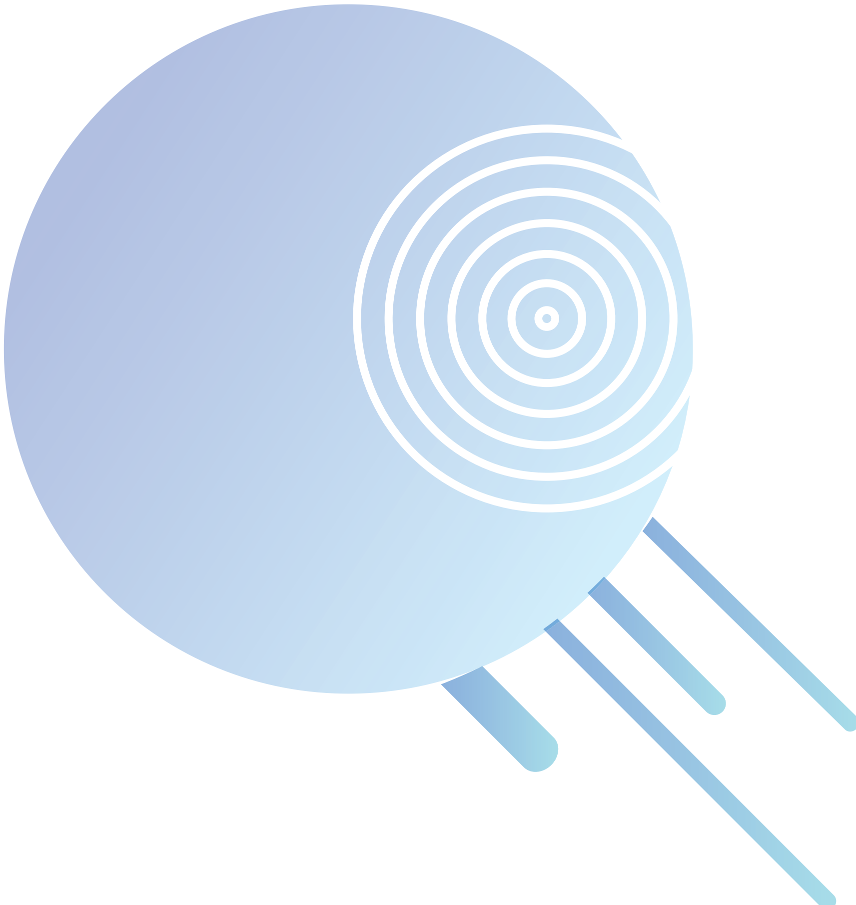
The methodological materials can offer an inspiration to mathematics teachers how to support the development of pupils' mathematical thinking.

Vzdělávací modul
Matematická gramotnost

Náměty na aktivity rozvíjející matematickou gramotnost

Růžena Blažková, Jiří Břehovský, Irena Budínová, Kamila Hrčková, Antonín Jančařík, Darina Jirotková, Štěpánka Kaňková, Jaroslava Kloboučková, Vlasta Moravcová, Hana Nováková, Jarmila Novotná, Jarmila Robová, Libuše Samková, Naďa Vondrová

Vydala Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta
Rok vydání: 2019
Počet stran: 147
Formát B5
1. vydání
ISBN 978-80-7603-059-6



SPOLEČENSTVÍ PRAXE

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická

MUNI

PEDAGOGICKÁ FAKULTA
UNIVERZITA KARLOVA

Pedagogická fakulta
Faculty of Education

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

...META